

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LXVIII - ANNO CXL

(2001)



LIGUORI EDITORE

1. The first part of the document is a title page. It contains the title of the document, the author's name, and the date of the document. The title is "The History of the United States of America". The author is "John Adams". The date is "1776".

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LXVIII - ANNO CXL

(2001)

LIGUORI EDITORE

Il presente volume è stato realizzato col contributo della Regione Campania

Tutti i diritti sono riservati. Nessuna parte di questa pubblicazione può essere tradotta, riprodotta, copiata o trasmessa senza l'autorizzazione scritta dell'editore. Fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, comma 4, della legge 22 aprile 1941 n. 633 ovvero dall'accordo stipulato tra SIAE, AIE, SNS e CNA, CONFARTIGIANATO, CASA, CLAAI, CONCOMMERCIO, CONFESERCENTI il 18 dicembre 2000. Le riproduzioni ad uso differente da quello personale potranno avvenire, per un numero di pagine non superiori al 15% del presente volume, solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, via delle Erbe 2, 20121 Milano, telefax 02 809506, e-mail aidro@iol.it.

Prima edizione italiana Dicembre 2001

Liguori Editore, Srl
via Posillipo 394
I 80123 Napoli

<http://www.liguori.it>

Copyright © Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche 2001

Napoli : Liguori, 2001
ISBN 88 - 207 - 3384 - 6

Ristampe:

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 2009 2008 2007 2006 2005 2004 2003 2002 2001

Questo volume è stato stampato in Italia dalle Officine Grafiche Liguori - Napoli su carta inalterabile, priva di acidi, a PH neutro, conforme alle norme Iso 9706 ∞.

INDICE

L. Carbone, R. Gatto, F. Palladino - <i>La costituzione di un fondo di antichi libri scientifici: il caso del Dipartimento di Matematica e Applicazioni della "Federico II" di Napoli e la collezione Govi-Davis</i>	pag. 7
R. Gatto - <i>Tra Diofanto e Fermat. Antonio Monforte e la determinazione dei problemi</i>	» 17
E. Massarotti - <i>A note on Generalized Dedekind Groups</i>	» 49
G. Anatriello - <i>A comparison for a class of elliptic equations</i>	» 55
R. Sersale - <i>La scoria d'alto forno attivata con alcali: un legante competitivo con il cemento Portland ordinario</i>	» 67
P.L. Vitagliano, M. Castaldi, V. Vitagliano - <i>Numerical Simulation of Double Diffusive Convection in a Four - component Isothermal Diffusion Boundary</i>	» 75
J.N. Flavin, B. Gleeson - <i>Behaviour of a cross-sectional measure for axisymmetric deformation in an isotropic elastic cylindrical plate</i>	» 99
G. Frigione, L. Bonavita - <i>Durabilità all'acqua del legante gesso</i>	» 109
R. Sersale - <i>La reazione alcali-silice e l'attacco solfatico interno: due ulteriori cause di degrado chimico del calcestruzzo di cemento</i>	» 119
G. Starita, A. Tartaglione - <i>A note on the Robin problem for the Stokes system</i>	» 129
I. Torcicollo, M. Vitiello - <i>On the nonlinear diffusion in the exterior of a sphere</i>	» 139
L. Carbone, G. Cardone, L. Faella - <i>L'epistolario Genocchi-Sella (1851-1883). Parte prima: I testi</i>	» 147

La costituzione di un fondo di antichi libri scientifici: il caso del Dipartimento di Matematica e Applicazioni della “Federico II” di Napoli e la collezione Govi-Davis

Nota di Luciano Carbone*, Romano Gatto**, Franco Palladino***

Presentata dal Socio Luciano Carbone
(Adunanza del 2 marzo 2001)

Key words: Govi, Davis, Collezione

Summary In this work, we discuss the formation of ancient scientific books collection in the library of *Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R. Caccioppoli”* of the *Università degli Studi di Napoli “Federico II”*, reconnecting it to celebrated Govi-Davis collection. Moreover we briefly describe it.

Sommario In questa nota discutiamo la costituzione del fondo di antichi libri scientifici presente nel Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R. Caccioppoli” dell’Università degli Studi di Napoli “Federico II”, ricollegandola alla celebre collezione Govi-Davis. Diamo inoltre una breve descrizione del fondo stesso.

* Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli” – Università degli Studi di Napoli “Federico II”.

** Dipartimento di Matematica dell’Università degli Studi della Basilicata.

*** Dipartimento di Matematica e Informatica dell’Università degli Studi di Salerno.

1. Introduzione

Non poche persone, curiosando tra i libri d'epoca del Dipartimento di **M**atematica della "Federico II", sono rimaste colpite dalla presenza di un cospicuo **n**umero di opere scientifiche editate nel Cinquecento, nel Seicento e nel Settecento. **Q**uesto gruppo di libri apparteneva già alla biblioteca del vecchio Istituto di **M**atematica trasformatosi in Dipartimento agli inizi degli anni ottanta del secolo di **r**ecente trascorso. L'Istituto lo aveva a sua volta ereditato dai vari gabinetti **s**cientifici e dal Seminario matematico ai quali si era sostituito alla fine della **s**econda guerra mondiale. I gabinetti e il Seminario, i cui libri inventariati sono **a**ndati dispersi, erano stati costituiti agli inizi del Novecento e, di conseguenza, non **d**ovevano aver acquisito questi volumi in via ordinaria¹.

D'altro canto, fin dal Seicento, ai libri utili agli studi e destinati alla pubblica **l**ettura provvedeva un'istituzione comune, la Biblioteca Universitaria². La prima **i**potesi che si può allora formulare circa la formazione di questo fondo librario è che **e**ssso sia dovuto a una donazione. Ma l'assenza, nelle fonti documentarie, di ogni **a**ccenno a tale donazione (fonti che per altro menzionano doni, anche di modesto **v**alore, ai gabinetti e al Seminario) nonché il fatto che questi testi antichi non **c**ostituivano un solo corpo ma erano presenti in tre gabinetti distinti, quello di **G**eometria proiettiva (che ne conteneva la maggior parte), quello di Geometria **a**nalitica e quello di Meccanica razionale, non confortano tale ipotesi. Altra deve **e**ssere dunque la via attraverso la quale si è costituito.

Attualmente il fondo consiste di circa 220 opere per un totale di circa 320 **v**olumi³ di cui una trentina circa recano *ex libris* o altre attestazioni di un

¹ Sui gabinetti matematici, sul Seminario matematico e sull'Istituto matematico dell'Università di Napoli si vedano L. CARBONE, G. CARDONE, J. CASANOVAS, S. MANCUSO, F. PALLADINO, *La sede storica degli studi superiori di matematica a Napoli nella sua attuale configurazione*, "Rendiconto dell'Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli", s. IV, LXV (1998), pp. 31-66; C. MIRANDA, *Breve storia e prospettive future dell'Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli*, ivi, s. IV, XLIV (1977), pp. 1-38; R. GATTO, *Storia di una "anomalia". Le facoltà di Scienze dell'Università di Napoli tra l'unità d'Italia e la riforma Gentile 1860-1923*, Napoli, Fridericiana Editrice Universitaria, 2000. In tutte queste pubblicazioni è possibile reperire ampie rassegne di fonti primarie.

² Alla Biblioteca Universitaria è dedicato l'ampio volume di sintesi di V. TROMBETTA, *Storia della Biblioteca Universitaria di Napoli dal Vicereame spagnolo all'Unità d'Italia*, Napoli, Vivarium, 1995. Lo stesso autore ha pubblicato numerosi studi su vari aspetti della storia della Biblioteca. Notizie dell'attività svolta dalla stessa Biblioteca nel periodo che va dall'unificazione italiana alla prima guerra mondiale si possono ricavare dagli *Annuari dell'Università di Napoli* dell'epoca.

³ Si tratta, in effetti, di un fondo significativo ma certamente ben lontano, per dimensioni e qualità, dai fondi più importanti della seconda metà dell'Ottocento, tra i quali ricordiamo la raccolta Riccardi, la cui sezione di opere italiane è descritta direttamente dal possessore nell'opera, da lui stesso curata, *Biblioteca matematica italiana*, Modena, Tip. Errede Soliani poi Soc. Tip. Modenese, 1870-1880, 2 vv. (ma si veda pure F. Barbieri, *Il contributo di Pietro Riccardi alla storiografia matematica*, Atti del Convegno "Pietro Riccardi (1828-1898) e la storiografia delle matematiche in Italia", Modena, 16-18 marzo 1987, pp. 48-66); la raccolta Govi, di cui diremo più avanti, compresa nel catalogo citato in n. 5; la raccolta Libri, descritta in varie epoche e in numerosi cataloghi, tra i quali va citato almeno il *Catalogue of the Mathematical, Historical, Bibliographical and Miscellaneous Portion of the Celebrated Library of M. Guglielmo Libri*, London, J. Davy and Sons, 1861, 2 vv.,

precedente possessore (per lo più firme, talora con date attestanti presumibilmente la data di acquisizione). Una decina di queste attestazioni di possesso consistono nella firma di Gilberto Govi⁴, seguita spesso da una data, e un'altra decina sono espresse mediante *ex libris* di Alexander Henry Davis⁵: è raffigurato uno scudo a scaglione sormontato da un elmo coronato, su cui si erge un leone rampante, e che è attraversato dalla divisa *Nisi dominus frustra*. Qualche opera, infine, presenta simultaneamente sia l'*ex libris* di Davis che la firma di Govi. Il fondo sembra così riconnettersi proprio alla celebre collezione Govi-Davis⁶.

2. La collezione Govi-Davis

Gilberto Govi fu un appassionato collezionista di testi scientifici e cultore di storia delle scienze fisiche e matematiche. A far nascere e ad alimentare questi interessi fu certamente, come raccontano i biografi, l'incontro avvenuto a Parigi con Guglielmo Libri⁷, l'insigne e chiacchierato bibliofilo e storico. Fu Libri, infatti, a consigliargli lo studio di Leonardo da Vinci. Ai manoscritti vinciani Govi si dedicò intensamente suscitando un vasto e rinnovato interesse in Italia e all'estero. Egli fu poi anche uno studioso profondo di Galilei. Durante circa quarant'anni di ricerche Govi raccolse oltre 4000 opere, tra le quali 1800 anteriori all'Ottocento, e circa 500 annate di riviste scientifiche⁸. Le perle della collezione erano senza alcun dubbio una copia del *Saggiatore*⁹ appartenuta allo stesso Galileo, che vi aveva apportato

curato da Libri medesimo in occasione della vendita all'asta della sua raccolta attraverso S.L. Sotheby e J. Wilkinson, avvenuta tra il 18 e il 26 luglio 1861.

⁴ GILBERTO GOVI (1826-1889) fu professore di Fisica all'Università di Napoli dal 1878 al giorno della sua morte. Su di lui si possono consultare F. BRIOSCHI, *Commemorazione di Gilberto Govi*, "Atti della R. Accademia dei Lincei. Rendiconti della Classe di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali", s. IV, v. V (1889), pp. 29-31 (anche in F. BRIOSCHI, *Opere matematiche*, Milano, Hoepli, 1906, t. IV, pp. 81-83); L. CICCONE, *Gilberto Govi*, "Annuario Scolastico della Regia Università degli Studi di Napoli 1889-90", Napoli, Tipog. R. Università, 1890, pp. 193-200; A. WOLYŃSKI, *Il prof. Gilberto Govi*, Roma, Stab. Tipog. Civelli, 1890; E.N. LEGNAZZI, *Prof. Gilberto Govi*, Atti e Memorie della R. Accademia Virgiliana di Mantova, XIV (1889-1890), pp. 101-153; B. NARDI, *Gilberto Govi*, Mantova, Tip. Aldo Manuzio, 1926; F. PALLADINO, *La storia delle scienze matematiche a Napoli tra Ottocento e Novecento: il contributo di Federico Amodeo*, Atti del Convegno "Pietro Riccardi (1828-1898) e la storiografia delle matematiche in Italia", Modena, 16-18 marzo 1987, pp. 269-296; L. BRIATORE, S. RAMAZZOTTI, *I <<Vinciani d'Italia>>: Gilberto Govi scienziato e storico*, "Giornale di Fisica", 35 (1994), pp. 127-133, R. GATTO, *Storia di una "anomalia"*, cit. in n. 1, *passim*.

⁵ ALEXANDER HENRY DAVIS (1840-1910) fu uno degli ultimi possessori della villa 'La Floridiana' di Napoli, un tempo dimora di Lucia Migliaccio, duchessa di Floridia, moglie morganatica di Ferdinando IV di Borbone, e dello stesso sovrano. Qualche notizia su di lui è reperibile nel *Catalogo della Biblioteca esistente alla 'Floridiana'* con introduzione di A. Silvestri, Napoli, Impresa Vendita in Italia Canessa-Fraia-Silvestri, 1917.

⁶ Tra i libri ottocenteschi della già citata Biblioteca del Dipartimento si conserva ancora un'altra ventina di queste attestazioni.

⁷ GUGLIELMO LIBRI (1803-1869); cfr. F. Tricomi, *Matematici Italiani del primo secolo dello stato unitario*, "Memorie della Accademia delle Scienze di Torino - Classe di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali", s. IV, I (1966), pp. 1-120.

⁸ La descrizione della collezione è contenuta nel *Catalogo*, cit. in n. 5.

⁹ G. GALILEI, *Il Saggiatore nel quale con la bilancia esquisita e giusta si ponderano le cose contenute nella Libreria Astronomica e Filosofica di Lotario Sarsi Sigensano scritto in forma di lettera all'Ill. mo et rev. mo Mons. D. Virginio Cesarini*, Roma, Giacomo Mascardi, 1623,

varie correzioni a penna, e un manoscritto dal titolo *Discorso astronomico del Galilei contro la libbra astronomica di Lotario Sarsi* con 55 aggiunte e correzioni autografe dovute ancora a Galileo, forse l'originale dato alle stampe dello stesso *Saggiatore* scritto sotto dettatura dell'autore a un suo discepolo. Tra le opere più significative della raccolta vanno almeno citate le prime edizioni dei *Principia mathematica* di Newton¹⁰, del *De revolutionibus orbium coelestium* di Copernico¹¹, del *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche*, del *Sidereus nuncius* di Galilei¹², delle *Meditationes de prima philosophia* di Descartes¹³, del *De Magnete* di Gilbert¹⁴, dell'*Ottica* e dell'*Astronomia nova* di Keplero¹⁵, della *Logarithmorum canonis descriptio* di Nepero¹⁶, delle *Tavole Rudolfine* di Tycho Brahe¹⁷, dell'*Horologium* e del *Systema Saturnium* di Huygens¹⁸.

Govi, privo di moglie e figli, intendeva donare la sua collezione, sparsa tra le sue case di Napoli (dove si trovava la maggior parte del materiale) e di Roma,

in *Le opere di Galileo Galilei*, Edizione Nazionale a cura di Antonio Favaro, Firenze, Barbera, 1890-1909, v. VI (da ora in avanti GG.) . Una copia del *Saggiatore*, che sembra corrispondere a quella descritta nel *Catalogo* cit. in n. 5, e alla quale qui si accenna, è custodita tra i manoscritti della Biblioteca Nazionale di Napoli con la segnatura XII E 74. Ciò lascia presumere che altre parti della collezione Govi siano presenti presso la stessa Biblioteca. Ricerche per individuare l'effettiva presenza e la consistenza di tali parti sono in atto.

¹⁰ I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londini, Jussu Societatis Regiae ac typis J. Streater, 1687. Nella raccolta era contenuta anche l'*Editio secunda*, Cantabrigiae, s. edit., 1713 e altre due edizioni: quella di Amsterdam del 1714, ristampa dell'edizione cantabrigense (due copie), e quella di Londra del 1726.

¹¹ N. COPERNICO, *De revolutionibus orbium coelestium libri VI*, Norimbergae, Petreium, 1543.

¹² G. GALILEI, *Dialogo [...] dove ne i congressi di quattro giornate si discorre sopra i due massimi sistemi del mondo Tolemaico e Copernicano*, Fiorenza, Landini, 1632, in GG. v. VII. G. GALILEI, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali*, Leida, Elsevirii, 1638, in GG., v. VIII. G. GALILEI, *Sidereus nuncius magna longeque admirabilia spectacula pandens suspiciendaque proponens unicuique, praesertim vero philosophis, atque astronomis quae a Galileo Galilei [...]*, Venetiis, Baglionum, 1610, in GG., v. III.

¹³ R. DESCARTES, *Meditationes de prima philosophia in qua Dei existentia et animae immortalitas demonstrantur*, Parisiis, Soly, 1641.

¹⁴ G. GILBERT, *De magnete, magneticisque corporibus, et de magno magnete tellure*, Londini, Short, 1600.

¹⁵ J. KEPLER, *Ad Vitellionem paralipomena quibus astronomiae pars optica traditur*, Francofurti, Marnium et haered. Aubrii, 1604. J. KEPLER, *Astronomia nova aetidegetos seu physica coelestis tradita commentariis de motibus stellae Martis ex observationibus G.V. Thyconis Brahe*, Praegae, 1609.

¹⁶ J. NAPIER, *Mirifici logarithmorum canonis descriptio eiusque usus in utraque Trigonometria*, Edimburgi, Hart, 1614.

¹⁷ T. BRAHE, *Tabulae Rudolphinae quibus astronomicae scientiae temporum longiquitate collapsae restauratio continetur [...] tabulas ipsas continuavit J. Keplerus*, Ulmae, Jo. Saurii, 1627. L'opera, come è noto, fu edita da Keplero ad un quarto di secolo dalla morte di Tycho Brahe.

¹⁸ C. HUYGENS, *Systema Saturnium sive de causis mirandorum Saturni phaenomenon et comite eius planeta novo*, Hagae Comitum, Vlacq, 1659. C. HUYGENS, *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*, Parisiis, Muguet, 1673.

all'Università di Roma per la dotazione di quella cattedra di Storia delle scienze matematiche e fisiche della quale auspicava la fondazione. Fallito tale progetto, pensò di donarla in parte al Museo Copernicano, in parte alla Biblioteca di Mantova. La sua improvvisa morte frustrò questo progetto¹⁹. La collezione corse allora il pericolo di essere smembrata; ma la dispersione fu evitata grazie all'intervento del maggiore Davis che l'acquistò dagli eredi. Davis acquistò anche la raccolta di estratti, 280 volumi contenenti circa 5000 opuscoli, dei quali quasi 500 relativi a lavori dello stesso Govi, e l'epistolario costituito da circa 1100 lettere selezionate presumibilmente da Govi medesimo.

Non meno di Govi, Davis fu un appassionato collezionista di gusto piuttosto eclettico i cui interessi erano principalmente diretti verso le edizioni contemporanee di lusso. La sua collezione, consistente in circa 1200 opere²⁰, era arricchita da un volume unico: un esemplare della *Vita di Napoleone* di Horne²¹ stampato in cinque volumi in quarto ai quali, per questa sola copia, erano stati aggiunti i margini trasformando il formato in *folio*. L'opera portava l'autografo di Joséphine Beauharnais ed era arricchita da una ciocca di capelli di Napoleone.

Altre edizioni di massimo pregio erano *The Birds of Asia* e *The Birds of Europa* di Gould²² in 12 volumi in *folio* con tavole in litografia acquerellate, il *Monograph of the Paradiseidae or Birds of Paradise* di Sharpe²³ in due volumi in *folio*, anch'esso con tavole litografate e acquerellate, *The Silva of North America* di Sargent²⁴ in 14 volumi in quarto con numerose tavole incise in rame, il *Reichenbachia Orchids Illustrated and Described* di Sander²⁵ in 4 volumi in *folio* con tavole cromolitografiche, il *Tapis d'Orient* pubblicato in fascicoli riuniti in 3 volumi in *folio* con tavole in eliotipia e facsimiltipia a colori²⁶.

Alla sua morte le due collezioni passarono alla signora Ethel Mac Donnell e, alla morte di quest'ultima, per espressa volontà testamentaria, furono disperse in una vendita all'asta, insieme con gli arredi della villa "La Floridiana" che le custodiva,

¹⁹ Si veda a tale proposito a WOLYNSKI, *Il prof. Gilberto Govi*, cit. in n. 4.

²⁰ La collezione è anch'essa descritta nel *Catalogo* cit. in n. 5.

²¹ R.H. HORNE, *History of Napoleon. Special Copy Enlarged to Five Volumes and Illustrated by the Addition of Upwards of Seven Hundred Portraits, Engravings, Historical Documents, Autograph, Letters, Original Drawings, Rare Caricatures and Other Matter of Interest and Importance*, London, Robert Tyas, 1841. Alla descrizione di quest'opera il *Catalogo* cit. in n. 5 dedica 23 pagine e 6 illustrazioni; fornisce infine anche la lista dei precedenti possessori e i nomi dei legatori. Questo volume è presente nel "Fondo Aosta" della Biblioteca Nazionale di Napoli insieme ad altri della collezione Davis, cosa che attesta che la Duchessa Elena d'Aosta partecipò all'asta aggiudicandosi alcuni lotti di libri.

²² J. GOULD, *The Birds of Asia. Dedicated to the Honourable East Indies Company*, London, Taylor and Francis, 1850-1883, vv. 7. J. GOULD, *The Birds of Europe*, London, Rich. and John Taylor, 1837, vv. 5.

²³ R.B. SHARPE, *Monograph of the Paradiseidae or Birds of Paradise and Ptilonorhynchidae or Bower-birds*, London, H. Sotheran and C., 1891-1898, vv. 2.

²⁴ CH. S. SARGENT, *The Silva of North America, a description of the Trees which Grow Naturally in North America Exclusive of Mexico. Illustrated with Figures and Analyses Drawn from Nature by Charles Edward Faxon and Engraved by Philibert and Eugène Picart*, Boston and New York, Houghton, Mafflin and Camp, 1892-1902, vv. 14.

²⁵ F. SANDER, *Reichenbachia. Orchids Illustrated and Described*, Serie I, 2 vv., Serie II, 2 vv., London, Sotheran and C., 1888-1892, vv.4.

²⁶ *Tapis d'Orient publiés sous les auspices du Ministère du Commerce et du Ministère des Cultes et de l'Instruction Publique par le Musée Commercial Imp. Roy. Autrichien*, Vienne, 1892-1894.

tra la fine del 1917 e l'inizio del 1918, nel pieno corso della prima guerra mondiale quasi a testimonianza della fine di un mondo. In occasione di tale asta fu preparato un catalogo di circa 400 pagine con numerose illustrazioni nel quale le due collezioni sono trattate separatamente. Vi è una descrizione talora più accurata talora meno dei vari volumi eccetto che per circa 600 volumi della collezione Davis e per circa 1000 di quelli della collezione Govi che, suddivisi in lotti (verosimilmente perché considerati di modesto interesse e valore), vengono illustrati sommariamente²⁷. Del catalogo furono stampati 20 esemplari a parte, in carta distinta numerata a mano e con la firma del tipografo. L'esemplare contrassegnato col numero 1 fu espressamente approntato per "S.A.R. Elena di Francia Duchessa d'Aosta", come si legge sul frontespizio.

3. La costituzione del fondo

Certamente un gruppo delle opere del fondo, quelle contraddistinte dalla presenza di segni di appartenenza, fu acquistato alla vendita all'incanto della collezione Govi-Davis. Come è possibile evincere dai timbri di appartenenza dei gabinetti apposti su alcuni libri, acquirenti sicuri furono tre professori dell'Università di Napoli: Pasquale Del Pezzo (1859-1936), allora ordinario di Geometria proiettiva, Nicola Salvatore-Dino (1843-1919), ordinario di Geometria analitica, Roberto Marcolongo (1862-1943), ordinario di Meccanica razionale. E tuttavia vari indizi ci inducono a credere che non furono soltanto questi pochi libri, "segnati", del fondo a provenire dalla collezione Govi-Davis, ma che anzi buona parte di essi sia stata acquistata alla suddetta asta. Un primo indizio è costituito dal fatto che circa 150 delle 180 opere del fondo sono presenti nel catalogo della collezione. Un secondo indizio consiste nel fatto che, salvo che per quei volumi che sono stati oggetto di restauro, sia il tipo di rilegatura che il loro stato di conservazione, coincidono con la descrizione datane dal catalogo. Alcune opere presentano delle attestazioni di appartenenza (distinte da quelle di Govi o di Davis) segnalate anch'esse nel catalogo. Infine, sia nel fondo che nel catalogo sono quasi del tutto assenti quelle opere edita a Napoli, o opere di scienziati napoletani che ci si aspetterebbe di trovare. Il fondo può pertanto a giusta ragione essere considerato una frazione significativa della collezione Govi-Davis.

Con forti margini di incertezza si può anche azzardare qualche ulteriore congettura. L'asta, se non rinviata, si svolse in un momento critico per la nazione: dal 29 dicembre 1917 al 17 gennaio 1918, ossia subito dopo la sconfitta di Caporetto. Sembra quindi difficile immaginare una dotazione economica tanto larga per i gabinetti della facoltà di matematica napoletana da consentire acquisti così rilevanti di materiali librari certamente di notevole pregio ma utili ormai solo per ricerche di natura storica. D'altro canto i restauri eseguiti su alcuni volumi e le rilegature fatte sono dello stesso tipo di quelli effettuati sulle raccolte di opuscoli e su opere appartenenti a Pasquale Del Pezzo, duca di Caianello, persona assai agiata: si può immaginare allora che egli abbia acquistato personalmente la gran parte dei

²⁷ I dati bibliografici del *Catalogo* sono forniti nella n. 5. Esso contiene anche una descrizione dell'epistolario Govi eseguita raccogliendo le lettere per mittente. Tra i mittenti elencati, circa 200, compaiono i maggiori matematici e fisici dell'epoca: Amici, Battaglini, Blaserna, Beltrami, Besso, Boncompagni, Brioschi, Cantoni, Casorati, Cerruti, Cesàro, Chiò, Cremona, De Gasparis, Dorna, Faà di Bruno, Emanuele Fergola, Favaro, Genocchi, Gherardi, Guccia, Mossotti, Pacinotti, Pinto, Porro, Riccardi, Righi, Schiaparelli, Secchi, Tacchini, Villari, Volpicelli.

volumi facendo apporre il timbro di appartenenza al Gabinetto di Geometria proiettiva solo a quelle opere acquisite con denaro pubblico. Tra le possibili motivazioni che dovettero spingere Del Pezzo all'acquisto va senz'altro considerata la volontà di conservare alla città di Napoli, della quale fu anche sindaco, una porzione significativa della parte scientifica della collezione Govi-Davis, ancor più tenendo conto che Govi era stato per molti anni professore di quella università. Preoccupazioni di questo tipo aveva mostrato in occasione della poderosa opera di ristrutturazione del tessuto urbano di Napoli seguito all'epidemia di colera degli anni ottanta dell'Ottocento, collaborando attivamente con Benedetto Croce nel salvataggio di varie opere architettoniche²⁸. Sembra allora difficile immaginare che egli non abbia considerato questo *corpus* di opere, tra le più illustri prodotte dall'intelletto umano, come il fulcro di quel piccolo gioiello che andava realizzando da un decennio: il Gabinetto di Geometria proiettiva²⁹. Giustamente, alla sua morte, i volumi rimasero custoditi nel luogo da lui creato.

Nell'attuale costituzione, il fondo rappresenta, quasi certamente, solo una aliquota di quanto fu effettivamente acquistato al momento della dispersione della collezione Govi-Davis. Il catalogo della collezione, ad esempio, segnala, al numero d'ordine 3949, un lotto eterogeneo di 22 fra dissertazioni accademiche dei soci dell'Accademia di Mantova, estratti della regia Accademia dei Lincei e del Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche. Nel fondo, invece, sono presenti tre dissertazioni accademiche settecentesche presentate all'Accademia di Mantova, contrassegnate dall'*ex libris* di Davis, cosa che ne prova l'acquisto all'asta della collezione Govi-Davis e altre 18 senza segni di appartenenza. Quanto al resto del lotto probabilmente è andato smarrito nel periodo dell'occupazione militare alleata dei locali dell'Università di Napoli avvenuta nel 1944. Carlo Miranda, che fu l'artefice della ricostruzione della Biblioteca dell'Istituto di Matematica, così descrive lo stato in cui furono trovati i volumi quando le truppe alleate lasciarono quei locali:

"[...] allo sgombero delle truppe alleate, poco dopo la liberazione di Roma, ci si trovò di fronte ad una situazione disastrosa perché i mobili dei Gabinetti e della sala Battaglini erano ammucchiati per terra in uno stanzone, allora privo di pavimento, che tant'anni prima era stata l'aula dell'Istituto di Fisica Sperimentale. Distrutti anche gli inventari e gli schedari e quanto avrebbe potuto servire a mettere ordine nel materiale rimasto [...]. La sistemazione dei libri richiese però un vero e proprio lavoro di facchinaggio, per il quale fu utilizzato un «carruciolino» con le rotelle di legno del tipo di quelli con cui gli scugnizzi solevano un tempo giocare nelle strade in discesa. Ancora più penoso il lavoro di classificazione del materiale librario, incredibilmente polveroso dopo mesi di abbandono, e la redazione manoscritta di uno stato di consistenza del materiale librario e non librario"³⁰.

4. Breve descrizione del fondo

Rinviando al catalogo del fondo per una descrizione dettagliata dei volumi in esso presenti³¹, ci limitiamo qui ad una descrizione unitaria.

²⁸ Per qualche cenno sulle attività di Del Pezzo in questo campo cfr. L. CARBONE, G. CARDONE, J. CASANOVAS, S. MANCUSO, F. PALLADINO, *La sede storica*, cit. in n. 1.

²⁹ Per una descrizione del gabinetto, peraltro attualmente ancora ben conservato, cfr. *ivi*.

³⁰ C. MIRANDA, *Breve storia*, cit. in n. 1.

³¹ Cfr. L. CARBONE, R. GATTO, F. PALLADINO, *Il fondo di antichi libri scientifici del Dipartimento di Matematica e Applicazioni della "Federico II" di Napoli: cataloghi ragionati*, di prossima pubblicazione.

Il fondo consiste di 216 opere per 323 volumi. Di queste opere 42, pari a 53 volumi, risultano dispersi, e 2, per un totale di 5 volumi su 7, parzialmente disperse. Suddivise le opere in funzione della data della loro pubblicazione, considerata in periodi di 50 anni, si ha la seguente distribuzione (un'opera non è datata):

1501-1550	1
1551-1600	6
1601-1650	12
1651-1700	27
1701-1750	61
1751-1800	108

154 di queste opere (260 volumi) sono presenti esplicitamente anche nel catalogo Govi-Davis. Di esse ne risultano disperse 33 (44 volumi) e parzialmente disperse 2 (5 volumi su 7). La distribuzione cronologica di dette opere risulta essere la seguente (un'opera non è datata):

1501-1550	0
1551-1600	3
1601-1650	10
1651-1700	26
1701-1750	56
1751-1800	58

Tra le opere non presenti nel catalogo, ma presenti nel fondo, su 3 vi è la firma di Govi e su 3 vi è l'*ex libris* di Davis. Si tratta evidentemente di opere inserite nei lotti collettivi del catalogo non descritti dettagliatamente. Ad un lotto collettivo, come già segnalato nel paragrafo 3, sembrano appartenere 18 dissertazioni accademiche anche se prive di segni di appartenenza. Alcuni volumi della collezione Govi-Davis presentano anche attestati di appartenenza ad altre più antiche e non meno illustri raccolte, quale ad esempio quella di Francesco e Tommaso Vargas Macchiucca³².

Tra le opere più significative in esso contenute vanno almeno segnalate due edizioni cinquecentesche degli *Elementi* di Euclide, una di Tartaglia del 1585³³ e

³² La collezione di Francesco Vargas Macchiucca, proseguita e ampliata dal figlio Tommaso, fu una delle più ampie ed ammirate della seconda metà del Settecento. Essa è descritta, sia pure sommariamente, in varie pubblicazioni d'epoca, quali F. PEPE, *Elogio storico del Marchese Vargas Macchiucca*, in *Giornale Enciclopedico del Regno di Napoli*, Settembre 1785, Napoli, nella stamperia Perger, 1785, pp. 92-93; L. GIUSTINIANI, *Dizionario Geografico ragionato del Regno di Napoli*, Tomo VI, Napoli, s. edit., 1803, pp. 347-349; S. ALOE, *Edifici de' privati e loro Musei e Biblioteche in Napoli e i luoghi celebri delle sue vicinanze*, Napoli, Stabilimento Tipografico di Gaetano Nobile, 1845, v. II, p. 330.

³³ *Euclide Megarense philosopho solo introduttore delle scienze mathematiche, diligentemente rassettato ed alla integrità ridotto per il degno professore di tal scienze Nicolò Tartalea [...] di nuovo con ogni diligenza ben corretto e ristampato*, Venetia, Heredi di Troian Navo, 1585.

una di Clavio del 1589³⁴, il *De vi percussionis* di Borelli³⁵, l'*Ars conjectandi* di Jacob Bernoulli³⁶, l'*Analyse* dell'Hospital³⁷, il *Traité de dynamique* di d'Alembert³⁸, la *Methodus inveniendi lineas curvas* e l'*Introductio* di Eulero³⁹ e qualche bel trattato di fisica settecentesco come il Nollet⁴⁰ e il Musschenbroeck⁴¹.

³⁴ *Euclidis posteriores libri. Accessit XVI de solidorum regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione. Omnes perspicuis demonstrationibus accuratisque scholiis illustrati: nunc iterum editi ac multarum rerum accessione locupletati: autore Christophoro Clavio*, Romae, apud Bartholomaeum Grassium, 1589, 2 vv.

³⁵ G.A. BORELLI, *De vi percussionis liber*, Bononiae, Montij, 1667

³⁶ J. BERNOULLI, *Ars conjectandi opus posthumum*, Basileae, Thurnisiorum, 1713.

³⁷ G.F.A. DE L'HOSPITAL, *Analyse des infiniment petits*, Paris, Montalant, 1716.

³⁸ J. D'ALEMBERT LE ROND, *Traité de dynamique*, Paris, David, 1743.

³⁹ L. EULER, *Methodus inveniendi lineas curvas*, Lausannae et Genevae, Bousquet, 1744. L. EULER, *Introductio in analysin infinitorum. Editio nova*, Lugduni, Apud Bernuset, de la Molliere, Falque et Soc., 1797, vv. 2.

⁴⁰ J.A. NOLLET, *Leçons de physique expérimentale*, Paris, Durand, 1775-1780, vv. 6 riuniti da diverse edizioni.

⁴¹ P. VAN MUSSCHENBROECK, *Cours de physique expérimentale et mathématique*, Traduit par Sigaud de la Fond, Paris, Dehansy le jeune, 1769, vv. 3.

Tra Diofanto e Fermat Antonio Monforte e la determinazione dei problemi

Nota di Romano Gatto*

Presentata dal Socio Luciano Carbone
(Adunanza del 2 marzo 2001)

Key words: *Ars analytica*, problemi.

Abstract In this paper we present the *De problematum determinatione*, the book of Antonio Monforte published on 1699, which at that time was the only organic treatise concerning the determination of problems. In it the author gave methods to decide about the possibility of a problem and algorithms to solve some difficult problems which other mathematicians had erroneously dealt with, or had considered impossible to be solved.

Riassunto In questo lavoro viene presentato il *De problematum determinazione* di Antonio Monforte, un'opera pubblicata nel 1699 che rappresenta l'unico trattato organico di quel tempo relativo alla determinazione dei problemi. In esso l'autore fornisce metodi per decidere della possibilità di un problema e algoritmi per risolvere problemi che altri matematici avevano affrontato in modo errato o avevano considerato impossibili.

* Dipartimento di Matematica dell'Università della Basilicata.

Antonio Monforte (1644-1717) fu uno dei principali artefici della diffusione dell'*ars analytica* cartesiana in Italia¹. Studioso acuto e abile analista, fu il primo in Italia a cogliere a pieno il messaggio della nuova geometria cartesiana² e a fornire un esempio convincente delle sue grandi potenzialità, della sua duttilità, della sua snellezza e speditezza, della sua capacità di rendere semplici problemi che, affrontati per via sintetica, richiedevano risoluzioni lunghe e complesse.

Nel 1676, risolse brillantemente dodici problemi proposti ai matematici italiani da uno sconosciuto matematico olandese, *latens post tabulam*³, riscuotendo l'apprezzamento unanime dei maggiori matematici italiani, ed anche di matematici oltremontani⁴. Guadagnò reputazione e fama a tal punto che, i Riformatori dello Studio di Padova, dovendo provvedere all'insegnamento dell'Astronomia, pensarono di conferire a lui quella

¹ Su questo importante personaggio, e i contributi da lui offerti alla diffusione della nuova scienza negli ambienti culturali napoletani tra il XVII e l'inizio del XVIII secolo, cfr. M. Torrini, *Antonio Monforte. Uno scienziato tra l'Accademia degli Investiganti e quella palatina di Medinacoeli*, in *Ricerche sulla cultura dell'Italia moderna a cura di Paola Zambelli*, Bari, 1973, pp. 99-146; F. Amodeo, *Vita matematica napoletana*, Parte prima, Napoli, Giannini e figli, 1905, pp. 21-30.

² Sulla diffusione della geometria cartesiana a Napoli cfr. R. Gatto, *Il cartesianesimo matematico a Napoli*, "Giornale Critico della Filosofia Italiana", LXXV (1996), pp. 360-379. In particolare per quanto riguarda il ruolo avuto dal Monforte, cfr. R. Gatto, *Contributo di Antonio Monforte allo sviluppo dell'Ars Analytica a Napoli*, "Atti delle Giornate di Storia della Matematica, Cetraro 8-12 Settembre 1988", Commenda di Rende, EditEl, 1991, pp. 217-232.

³ Cfr. A. Monforte, *Epistola ad clarissimum et eruditissimum virum Antonium Magliabechi, continens solutiones problematum, quae Laidiensis Geometra posita tabulma latens proposuit*, Neapoli, 1676.

⁴ Una per tutte la testimonianza di Vincenzo Viviani che, come molti altri geometri italiani, aveva tentato la risoluzione dei dodici problemi col tradizionale metodo sintetico: "Stupenda e concisa oltre a modo è la maniera con cui V. S. Illma si sbriga per numeri da que' problemi, a segno che facilmente io m'induco a credere di non aver inteso punto ne poco le proposizioni dell'Incognito dove io mi persuasi che per risolverli interamente vi fossero necessarie quelle determinazioni particolari a Problema per Problema, considerato come solo, a quali stimai in quel tempo che singolarmente ciascuno si estendesse per dar prima soddisfazione alla proposta di esso, traslocando a bello studio il considerarli quasi tutti in un mazzo, nel qual caso, fatte prima alcune deduzioni, mi sarei contenuto diversamente e con molto minor lunghezza di quel ch'io feci" (cfr. Biblioteca Nazionale di Firenze, Mss. Gal. 252, Carteggio scientifico, Vincenzo Viviani, c. 262). Questo opuscolo fu recensito dal "Giornale de' Letterati di Roma", t. I (1677), pp. 8-10. Ad esso, in particolare si interessò Leibniz che, tramite Magliabechi, fece conoscere il suo parere al Monforte (cfr. in merito, R. Gatto - F. Palladino, *The "Dutch's Problems" and Leibniz's Point of View on the "Analytic Art"*, "Studia Leibnitiana", Band XXIV/1 (1992), pp. 73-92).

cattedra⁵. Nella lunga e aspra polemica tra *analisti cartesiani* e *sintetici anticartesiani*, iniziata a Napoli nella seconda metà del Seicento e

⁵ Proponente di tale nomina fu Antonio Magliabechi convinto che Antonio Monforte fosse in quel momento il migliore matematico italiano disponibile per un tale incarico. Magliabechi fece da tramite tra Monforte, e i professori dell'Università di Padova Michelangelo Fardella e Domenico Guglielmini che ne sostenevano la candidatura presso i Riformatori di quello Studio. L'affare si protrasse per oltre due anni come risulta dal carteggio Magliabechi. In una lettera a questi indirizzata il 12 gennaio 1700, Monforte scriveva: "Ricevo nella lettera di Vostra Signoria illustrissima acclusa quella del signor Guglielmini e similmente in questa accludo la risposta: non ho modi da poter esprimere quanto mi sento a Vostra Signoria illustrissima per tutti i versi obbligato e con molta confusione considero gl'incomodi che per amor mio sostiene ma, sapendo quanto sia grande la sua gentilezza, a quella mi affido [...]" (cfr. A. Quondam M. Rak, *Lettere dal Regno ad Antonio Magliabechi*, Napoli, Guida, 1978, n. 668, pp. 798-799). Fu questo l'inizio di una vicenda che verosimilmente non ebbe sbocchi immediati, come si può evincere da una lettera del 19 luglio del 1701, nella quale, scrivendo a Magliabechi, Monforte si limitava a dire: "[...] quando averà congiuntura di scrivere a quei signori di Padua la supplico riverirli in nome mio [...]" (*ibid.*, n. 669, p. 799). La questione subì una brusca accelerazione agli inizi del 1702. Il 3 gennaio di quell'anno Monforte scriveva ancora al Magliabechi: "Ricevo la favoritissima di Vostra Signoria illustrissima con l'acclusa del sig. abbate Fardella non prima delli 28 di dicembre mentre, per evitare li disturbi accaduti in questa nostra città mi sono trattenuto in una mia villa. Il signor abbate Fardella con efficacissime espressioni dimostra favorirmi sopra di ogni mio merito et il tutto riconosco dalle grazie di Vostra Signoria illustrissima che m'ha fatto conoscere uomini di questa qualità. L'ho pregato mi desse notizia del soldo che aveva tenuto il signor Montanari per la medesima cattedra d'astronomia e meteore a fine di risolvermi se posso ricevere le sue grazie" (*ibid.*, n. 670, pp. 799-800). Il 6 gennaio dello stesso anno Domenico Guglielmini scriveva a Magliabechi: "Il P. Abbate Fardella ed io stiamo attendendo la risoluzione del Sig. Monforte, o per dir meglio l'avviso del residente venuto in Napoli agli Ecc.mi Riformatori, trovarsi egli in Napoli in disposizione d'applicarsi alla cattedra di Meteore et Astronomia hora vacante (cfr. ms. della Biblioteca Nazionale di Firenze, Magl. VIII 744, cc. 251v-252r). Monforte non si mosse da Napoli probabilmente perché non stimò conveniente il "soldo" offerto dai Riformatori dello Studio di Padova. Meno probabili appaiono le ragioni addotte da Alfonso Mariconda in una lettera al Magliabechi del 5 settembre 1702: "[...] ultimamente a voce mi significò il quanto s'era adoperato nel far promuovere il nostro signor Monforte alla cattedra dell'astronomia di Padova perciò prendo libero ardire e confidenza di rappresentarle come so di certo che dal medesimo Monforte si sia rinunciato l'onore di tal'incarico per li molti suoi attacchi in questa città e perché io maggiormente doppio aver praticato fuori della mia patria ho avuto desiderio ed ambizione che li veri virtuosi e letterati della medesima siano maggiormente conosciuti e riconosciuti fuori per quel che veramente sono e meritano" (Cfr. A. Quondam M. Rak, *Lettere dal Regno*, cit., n. 610, pp. 746-748).

protrattasi fino ai primi decenni del Settecento, Monforte sostenne con vigore le ragioni dell'analisi cartesiana, ne mostrò i vantaggi e ne propagandò l'efficacia in un suo piccolo trattato, *De Problematum determinatione*⁶, nel quale prese in considerazione un aspetto dell'analisi algebrica da nessuno affrontato fino ad allora nella sua generalità, quello della determinazione dei problemi. L'estensore della nota uscita sugli *Acta Eruditorum*, Christophorus Pfautz, così presentava questo opuscolo:

"[...] Argumentum scriptoris uti artis analyticae studioso vel maxime necessarium est; ita eius tractatio hic ab Autore suscepta, non potest non iucundam materiam iis praebere, qui in geometricis studiis iam aliquousque provecti, facultatem suam in hoc genere experiri, porroque proficere gestiunt [...]"⁷

Uno degli scopi di questo libro era di tacitare quanti avevano avanzato sospetti circa la capacità dell'analisi di stabilire *a priori* la possibilità o meno di un problema. Si trattava di una materia che né Descartes, né Fermat, né altri matematici fino ad allora avevano esplicitamente affrontato. Anzi, il loro silenzio, e gli errori commessi da alcuni analisti sembravano dare ragione a quanti sostenevano che l'esistenza di un tale limite fosse un difetto insito nell'analisi algebrica cartesiana.

Monforte era un analista di chiara formazione cartesiana; cartesiana era la notazione da lui adoperata, cartesiana era l'ispirazione e cartesiano lo stile della sua opera. E tuttavia egli non rimase circoscritto alle sole tematiche della *Géométrie* di Descartes. Bene informato sulla letteratura matematica del suo tempo, era capace di spaziare tra gli argomenti più svariati. Oltre che alla determinazione, risoluzione e costruzione delle equazioni, era particolarmente interessato alla teoria dei numeri e ai problemi diofantei. Il *Diophanto*⁸ e la teoria dei luoghi piani e solidi⁹ di Fermat rappresentarono per lui veri e propri testi di riferimento dai quali ricavò spunti di ricerca e suggerimenti che gli consentirono di affinare le

⁶ Cfr. A. de Monforte, *De siderum intervallis et magnitudinibus, cui accessit eiusdem tractatus de problematum determinatione*, Neapoli, ex Typographia Nicola Abri, 1699.

⁷ Cfr. *Acta Eruditorum* A. 1700, 124-127.

⁸ Le Osservazioni di Fermat, scritte in margine a un esemplare dell'edizione delle Opere di Diofanto curate da Claude Gaspard Bachet nel 1621, furono pubblicate postume dal figlio Samuel nel volume *Diophanti Alexandrini arithmeticonum libri sex... Cum commentariis C.G. Bacheti V. C. et observationibus D. P. de Fermat Senatoris Tolosani. Accessit doctrinae analyticae inventum novum, collectum ex variis eiusdem D. de Fermat epistolis*, Tolosae, 1670. Qui faremo riferimento all'edizione italiana P. de Fermat, *Osservazioni su Diofanto*, Torino, Boringhieri, 1959, ristampa 1969.

⁹ Cfr. P. de Fermat, *Ad locos planos et solidos isagoge*, in *Varia Opera Mathematica*, Tolosae, apud Johannem Pech, 1679, pp. 1-8.

sue tecniche dimostrative e risolutive e di trovare nuovi algoritmi per la risoluzione di problemi indeterminati. Così, manipolando opportunamente il secondo dei metodi dei massimi e minimi di Fermat, elaborò un proprio metodo per decidere della determinazione dei problemi. E, riflettendo sulla costruzione di Fermat delle equazioni solide¹⁰ e sulla controversia in merito da questo avuta con Descartes¹¹, produsse un algoritmo per la risoluzione e costruzioni delle equazioni di 4° grado migliore di quelli dei due autori francesi.

Sebbene il *De problematum determinatione* sia stato edito nel 1699, alcune delle cose in esso presenti erano state affrontate dal Monforte anni prima, come si può leggere in una lettera scritta da Venezia ad Antonio Magliabechi il 25 gennaio 1681:

“Per viaggio mi tratterò in un trattatello che dicono fusse stato fatto da Leonte scolare di Platone ma che per l'ingiuria del tempo non è venuto a' nostri giorni et è un modo per conoscere quando quel che si cerca in geometria è possibile o no, lo stimo necessario perché in questo hanno errato molti grand'uomini et anco ne' nostri tempi e, per tacere Renaldini e Glorioso, vi è incorso anche il Wallis professore famosissimo in Inghilterra come Vostra Signoria illustrissima sa e questo anco uscirà sotto la sua protezione”¹².

Dunque la questione della determinazione dei problemi era stata affrontata nell'antichità per via analitica, ma la perdita dell'opera di Leonte e lo scarso uso che nell'antichità si era fatto dell'analisi, avrebbero cancellato ogni memoria di ciò se non ne avesse fatto menzione Proclo nel suo *Commento al Primo libro degli Elementi di Euclide*¹³. Ma verosimilmente Leonte aveva fatto uso dell'analisi geometrica della tradizione degli antichi; la conoscenza dei suoi metodi avrebbe potuto avere al più un valore documentario e poco avrebbe potuto aiutare gli analisti, dal momento che difficilmente i suoi procedimenti avrebbero potuto essere immediatamente convertiti nell'analisi algebrica cartesiana.

¹⁰ Cfr. P. de Fermat, *Appendix ad isagogem topicam Continens solutionem problematum solidorum per locos*, in *Varia Opera Mathematica*, cit., pp. 9-11.

¹¹ Cfr. P. de Fermat, *De solutione problematum geometricorum per curvas simplicissimas, et unicuique problematum generi proprie convenientes. Dissertatio tripartita*, in *Varia Opera Mathematica*, cit., pp. 110-115; cfr., p. 111.

¹² Cfr. A. Quondam M. Rak (a cura), *Lettere dal Regno ad Antonio Magliabechi*, cit., pp. 783-784.

¹³ Cfr. Procli *Diadochi Lycii philosophi platonici ac mathematici probatissimi in primum Euclidis Elementorum Librum commentariorum ad universam mathematicam disciplinam principium eruditionis tradentium libri IIII. A Francisco Barocio Patrizio Veneto summa opera, cura, ac diligentia cunctis mendis espurgati: scolii, et figuris, quae in greco codice omnes desiderabantur aucti: primum iam romanae linguae venustate donati, et nunc recens editi*... Patavi, Excudebat Gratosus Perchacinus, 1560, cfr. Lib. 2.

Da un punto di vista algebrico, infatti, la questione della determinazione delle equazioni consisteva nel trovare degli algoritmi algebrici che, operando direttamente sui termini delle equazioni risolventi i problemi, fornissero indicazioni immediate e certe sulla possibilità o meno del problema. È quanto avviene nel *De problematum determinatione*. Conforme al dettato cartesiano, Monforte innanzitutto traduce in equazioni il problema proposto, ma prima di risolvere dette equazioni, ne analizza i singoli termini, ne spiega il significato e le reciproche relazioni, ne determina i limiti entro cui possono assumere valori compatibili con i dati del problema. È quest'ultima informazione che consente di dedurre se il problema è possibile o meno.

Prima di illustrare i metodi di Monforte, è bene precisare che il *De Problematum determinatione*, 42 pagine in tutto, contiene molte più cose di quante ne indica il titolo. Monforte, infatti, oltre a mostrare i metodi che l'analisi può impiegare per decidere della determinazione di un problema, corregge errori commessi da altri matematici che nella risoluzione di alcuni problemi avevano fatto un cattivo uso dell'analisi, fornisce algoritmi risolutivi, discute e risolve alcuni interessanti problemi diofantei da molti ritenuti impossibili. Insomma il *De problematum determinatione* è un trattatello nel quale si propongono problemi difficili per lo più già presi in considerazione da altri matematici che, nel risolverli, o avevano fallito, o avevano seguito vie intricate, lunghe e artificiose. Monforte ne imposta la risoluzione analitica, ne decide la possibilità, ne fornisce infine gli algoritmi risolutivi più semplici e più immediati.

In tutto ciò colpisce la sicurezza e l'abilità con la quale egli si muove in un campo dell'analisi da nessuno fino ad allora preso in considerazione nella sua generalità. In una breve premessa avverte che molti autori, anche illustri, avrebbero potuto evitare di commettere errori se avessero saputo stabilire *a priori* quando un problema è possibile e quando no. Tra questi Wallis che, nella sua *Dedicatio adversus Moeibomium*¹⁴, aveva affermato che spesso l'analista non aveva altro mezzo per scoprire l'impossibilità di un problema se non quello di svolgerlo prima come se fosse possibile. Per smentire tale punto di vista Monforte ricorre allo stesso esempio portato da Wallis e fa vedere che, analizzando i termini dell'equazione si può facilmente decidere se il problema è determinato.

Data l'equazione $x^2 - 12x + 84 = 0$, se si opera la trasposizione $84 = 12x - x^2$, si vede subito che deve essere $12x > x^2$, e quindi $x < 12$. D'altra parte operando la trasposizione $x^2 = 12x - 84$, si ricava $x > 7$. Dunque imponendo la condizione $7 < x < 12$ si potrebbe credere che il problema è possibile. Ciò in realtà non è vero perché, essendo la somma delle radici uguale a 12, non

¹⁴ *Dedicatio adversus Marci Moeibomii De Proportionibus Dialogum, Tractatus Elencticus*, in J. Wallis, *Opera Mathematica*, Oxoniae, e Theatro Sheldoniano, 1695, v. I, p. 239.

“potest homogeneum maius esse quam 36”¹⁵. L’omogeneo, o omogeneo del prodotto come viene chiamato altre volte (perché fornisce il valore del prodotto delle radici dell’equazione), è il termine noto. Per stabilire che esso non può essere maggiore di 36 Monforte si avvale di un risultato trovato da Fermat con uno dei suoi due metodi sui massimi e minimi, cioè che il massimo valore delle radici di un’equazione di secondo grado si ha quando queste sono coincidenti; quindi nel caso considerato quando sono entrambe uguali a 6¹⁶. Monforte prende le mosse da questo metodo per elaborarne uno suo capace di mostrare immediatamente la possibilità o meno di un problema. Data un’equazione $f(x)=k$, questo consiste nel determinare, a seconda dei casi, il massimo, il minimo, o entrambi massimo e minimo della funzione $y=f(x)$ e quindi fare il confronto con l’omogeneo del prodotto k .

Fermat aveva esposto il secondo metodo dei massimi e minimi per determinare il massimo di $f(x)$ a proposito del problema:

“Secare lineam AC datam ad punctum B, ita ut solidum contentum sub quadrato AB et linea BC sit maximum”¹⁷

A tal fine aveva preliminarmente risolto il problema di determinare su un segmento AC di lunghezza B un punto E tale che il rettangolo AEC (ossia il rettangolo avente dimensioni AE ed EC) fosse uguale a Z (con Z minore dell’area del rettangolo massimo).



Dunque, posto, come fa Fermat¹⁸, $A=AE$, sarà $Z=A(B-A)$, ossia

$$Z=AB-A^2 \quad (1)$$

Poiché questa è un’equazione “anceps”, ammette cioè due soluzioni distinte, detta $E \neq A$ la seconda radice, deve valere anche la relazione $Z=E(B-E)$, cioè

$$Z=EB-E^2 \quad (2)$$

Dal confrontando delle (1) e (2) si ottiene facilmente

¹⁵ *De Problematum*, cit., p. 6.

¹⁶ Cfr., *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, in P. de Fermat, *Varia Opera Mathematica*, cit., pp. 63-73.

¹⁷ *Ibid.*, p. 66.

¹⁸ Fermat, alla maniera di Viète, indica con vocali le incognite e con consonanti i coefficienti di un’equazione.

$$B = \frac{A^2 - E^2}{A - E} = A + E$$

Fermat afferma che se si fa crescere Z la differenza $A-E$ decresce fino a divenire uguale a 0 quando Z è massimo. In tal caso, allora, $A=E$ e $B=2A$, ovvero $A=B/2$.

Lo scienziato francese non fu prodigo di spiegazioni in merito ed è probabile che Monforte trovasse poco convincente una conclusione che faceva ricorso a considerazioni di natura infinitesimale, per cui si adoperò per ritrovarne una fondata unicamente su argomentazioni di carattere algebrico.

Il suo ragionamento è il seguente. Se la somma delle radici è 2^o , l'equazione ce ha due radici uguali ad a sarà $x^2 - 2ax + a^2 = 0$, e il prodotto delle radici sarà a^2 . Se le radici sono distinte, ma la somma è sempre 2^o , si potrà scrivere $x=a-b$, $x=a+b$, è l'equazione sarà del tipo $x^2 + a^2 - 2ax - b^2 = 0$. Il prodotto delle radici sarà allora $a^2 - b^2$, e questo sarà massimo quando $b^2=0$. Dunque il prodotto delle radici è massimo quando le stesse sono coincidenti. Monforte procede con esempi numerici cominciando dall'equazione di secondo grado $54=13x-x^2$. Col metodo della doppia radice è

$$13x - x^2 = 13y - y^2$$

ossia

$$13(x-y) = x^2 - y^2 \quad (3)$$

Dividendo tutto per $x-y$ e ponendo $x=y$, si ha

$$x = \frac{13}{2}$$

Ma, per tale valore, $13x - x^2 = 13 \cdot \frac{13}{2} - \frac{169}{4} = 42 + \frac{1}{4} < 54$ e il problema è impossibile.

Il matematico napoletano applica poi lo stesso procedimento successivamente a equazioni del tipo $b^n = ax^{n-1} - x^n$, per $n=3, 4, 5$, lasciando infine al lettore il compito di generalizzare per n qualsiasi, mostrando che il massimo si ha sempre per

$$x = \frac{n-1}{n} a$$

il che equivale all'annullamento della derivata prima della funzione x di cui si cerca il massimo. Suo scopo non è di istituire un nuovo metodo per

trovare i massimi e i minimi di una funzione, ma di servirsi dei massimi e dei minimi per determinare i limiti entro cui possono variare le radici di un'equazione e decidere quindi della determinazione o meno del problema.¹⁹ Con il suo metodo si evita l'operazione di far «tendere a 0» – come diciamo oggi – la differenza delle radici $x-y$ (A-E in Fermat), operazione sulla cui legittimità si discuteva molto a quel tempo. Esso, infatti, conduce in ogni caso a una situazione in cui detta differenza, come appare chiaramente dalla (3), scompare per effetto di una semplice semplificazione.

Per dare una dimostrazione della validità e dell'efficacia del suo metodo, Monforte risolve un problema affrontato da Luca Pacioli

“Dividere 10 in quattro parti che siano in progressione geometrica e tali che la somma di 8 volte la prima più 4 volte la seconda più 3 volte la terza più la quarta dia 16”.

Questo problema era stato preso in considerazione anche da Camillo Gloriosi il quale ne aveva ricercato invano una seconda radice diversa da quella trovata da Pacioli²⁰. In realtà Gloriosi, partito da tre zetetici stabiliti da Viète, si impegnò in una lunga e intricata soluzione cadendo in errore nel fare la somma di due radicali, cosa che non gli consentì di ritrovare nemmeno la radice del Pacioli.

Monforte ripercorre il cammino di Gloriosi, ne scopre e corregge l'errore, ritrova la soluzione di Pacioli e dimostra che essa è unica. Punto di partenza, come abbiamo detto, sono tre zetetici di Viète:

1° [in una proporzione continua] *la somma degli estremi più il triplo della somma dei medi, sta alla somma dei medi come il quadrato della somma dei medi sta al prodotto degli estremi*²¹

¹⁹ Dopo aver mostrato problemi nei quali è necessario trovare il massimo della funzione in esame, Monforte dà esempi di altri problemi nei quali è necessario trovare il minimo ed altri ancora per i quali è necessario determinare entrambi i limiti entro cui l'incognita può variare.

²⁰ Cfr. G.C. Gloriosi, *Exercitationum mathematicarum decas secunda*, Neapoli, Ex Typographia Secundini Roncalioli, 1635, *Exercitatio IV*, pp. 64-72. Giovanni Camillo Gloriosi (1572-1643) tenne dopo Galileo (dal 1613 al 1622) la cattedra di matematica dell'Università di Padova (cfr. A. Favaro, *Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. IX Giovanni Camillo Gloriosi*, “Atti del Reale istituto Veneto di scienze lettere ed arti” t. LXIII (1903-04), p. II, pp. 1-48.

²¹ Cfr. F. Viète, *Zeteticorum liber*, in *Opera mathematica in unicum volumen congesta ac recognita. Opera ac studio Francisci à Schooten*, Lugduni Batavorum, ex officina Bonavenutrae ac Abrahami Elzevirorum, 1646. Si tratta dello zetetico XVI del lib. 3, così enunciato dall'autore: “Solidum triplum sub adgregato mediarum, et quadrato adgregati extremarum, plus cubo adgregati extremarum, minus quadruplo cubo adgregati mediarum, si adplicetur ad

2° In un rettangolo, il quadrato della somma dei lati meno il quadruplo prodotto dei lati, è uguale al quadrato della differenza dei lati²².

3° La somma della metà dei lati, se sottratta della metà della differenza [degli stessi] è uguale al lato minore, se sommata alla metà della differenza [degli stessi], è uguale al lato maggiore²³.

Data dunque la proporzione continua $a:b=b:c=c:d$, il problema del Pacioli richiede che si verifichino le due condizioni

$$8a+4b+3c+d=16$$

$$a+b+c+d=10$$

Per il 1° zetetico, sarà:

$$[(a+d)+3(b+c)] : (b+c) = (b+c)^2 : ad$$

e quindi

$$(b+c)^3 = ad[(a+d)+3(b+c)]$$

Posto come Gloriosi

$$b+c=x,$$

$$a+d=10-x$$

si ha

adgregatum extremarum, plus adgregato triplo mediarum: Planum quod oritur, aequale est quadrato differentiae extremarum". Questo zetetico, che Monforte esprime nella forma: "aggregatum extremorum, addito triplo aggregato mediorum, ad aggregatum mediorum se habet, ut quadratum aggregati mediorum ad rectangulum sub mediis, vel extremis", serve a risolvere il problema: "Dato adgregato extremarum, et adgregato mediarum in serie quatuor continue proportionalium, invenire continue proportionales

²² *Ibid.*, lib. 2, zetetico 4., che risolve il problema "Dato rectangulo sub lateribus, et adgregato laterum: invenitur latera", è da Viète enunciato nel modo seguente: "Quadratum adgregati laterum, minus quadruplo rectangulo sub lateribus: aequatur quadrato differentia laterum", e da Monforte: "In rectangulo vero quadratum aggregati laterum, dempto quadruplo rectangulo sub lateribus, est aequale quadrato differentiae laterum",

²³ *Ibid.*, lib. 1, zetetico 1. Con questo zetetico, enunciato nella forma: "Adgregatum dimidium laterum minus dimidia differentia aequale est lateri minori, plus eadem, maiori", Viète risolve il problema "Data differentia quorum laterum, et adgregato eorumdem, invenire latera". Monforte scrive esattamente: "Aggregatum dimidiorum laterum, dempta dimidia differentia, aequale est lateri minori, addita, majori".

$$x^3 = ad[(10-x)+3x]$$

e quindi

$$ad = \frac{x^3}{10+2x}$$

D'altra parte per il 2° zetetico si può scrivere:

$$(a+d)^2 - 4ad = (a-d)^2 \quad (4)$$

e, per il 3°

$$\frac{a+d}{2} - \frac{a-d}{2} = d \quad (5)$$

$$\frac{a+d}{2} + \frac{a-d}{2} = a \quad (6)$$

Moltiplicando per 8 ambo i membri della (5) si ottiene

$$8\frac{a+d}{2} + 8\frac{a-d}{2} = 8d$$

cioè

$$8d = 4(a+d) + 4(a-d)$$

e, poiché dalla (4) risulta

$$a-d = \sqrt{(a+d)^2 - 4ad} \quad (7)$$

facilmente si ottiene

$$8d = 40 - 4x - \sqrt{1600 - 320x + 16x^2 - \frac{64x^3}{10+2x}} \quad (8)$$

Monforte chiama la (6) *primo prodotto* e la trasforma nel seguente modo:

$$8d = 40 - 4x - \sqrt{\frac{(20+4x)(1600-320x+16x^2) - 128x^3}{20+4x}}$$

da cui

$$8d = 40 - 4x - \sqrt{\frac{32000 - 960x^2 - 64x^3}{20+4x}}$$

e quindi

$$8d = 40 - 4x - 8\sqrt{\frac{500 - 15x^2 - x^3}{20 + 4x}} \quad (9)$$

Se, invece, si sostituisce la (7) nella (6) similmente si ottiene:

$$a = 5 - \frac{x}{2} + \sqrt{25 - 5x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{x^3}{10 + 2x}}$$

che Monforte chiama *quarto prodotto* e trasforma in modo che il radicando diventi identico a quello della (9). Infatti scrive

$$a = 5 - \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{(20 + 4x)(25 - 5x) + x^2(5 + x) - 2x^3}{20 + 4x}}$$

da cui segue

$$a = 5 - \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{500 - 15x^2 - x^3}{20 + 4x}}$$

Si ha allora

$$8d + a = \sqrt{\frac{500 - 15x^2 - x^3}{20 + 4x}} + 5 - \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{500 - 15x^2 - x^3}{20 + 4x}}$$

cioè

$$8d + a = 45 - 4\frac{1}{2}x - 7\sqrt{\frac{500 - 15x^2 - x^3}{20 + 4x}}$$

Poiché gli zetetici prima considerati permettono di scrivere anche le relazioni

$$\frac{b+c}{2} - \frac{b-c}{2} = c \quad \frac{b+c}{2} + \frac{b-c}{2} = b \quad (b+c)^2 - 4bc = (b-c)^2$$

poiché

$$(a+d)^2 + 3(b+c):(b+c) = (b+c)^2 : bc$$

$$bc = \frac{(b+c)^3}{(a+d) + 3(b+c)} = \frac{x^3}{10 + 2x}$$

$$(b-c)^2 = x^2 - \frac{4x^3}{10+2x}$$

operando come prima si ottiene

$$4b+3c = \frac{7}{2}x - \sqrt{\frac{5x^2 - x^3}{20+4x}} \quad (10)$$

Dovendo essere $8a+4b+3c+d=16$, dovrà essere

$$45 - 4\frac{1}{2}x - 7\sqrt{\frac{500-15x^2-x^3}{20+4x}} + \frac{7}{2}x - \sqrt{\frac{5x^2-x^3}{20+4x}} = 16 \quad (11)$$

Per mettere questa equazione in forma canonica è necessario eseguire la somma dei due termini contenenti i radicali. Era stata proprio questa operazione a indurre in errore Gloriosi. Monforte mostra che si può calcolare facilmente tale somma se si trova una soluzione comune ai numeratori di detti due termini. A tal fine eguaglia a zero i due termini, li eleva al quadrato e li libera dei denominatori ottenendo,

$$\text{da } 7\sqrt{\frac{500-15x^2-x^3}{20+4x}} = 0 \quad x^3 = \frac{24500-735x^2}{49}$$

$$\text{e da } \sqrt{\frac{5x^2-x^3}{20+4x}} = 0 \quad x^3 = 5x^2$$

Il confronto di queste espressioni fornisce l'equazione

$$\frac{24500-735x^2}{49} = 5x^2$$

dalla quale si ricava

$$x = \pm 5$$

Monforte fa vedere che la radice $x=5$ non è accettabile. Infatti dividendo il polinomio $500-15x^2-x^3$ per il binomio $x-5$ si ottiene $-(x+10)^2$,

con che il radicando di $\sqrt{\frac{500-15x^2-x^3}{20+4x}}$ risulta essere negativo, cosa che, invece, non avviene assumendo la radice $x=-5$.

D'altra parte, essendo

$$7\sqrt{\frac{500-15x^2-x^3}{20+4x}} = \sqrt{\frac{24500-735x^2-49x^3}{20+4x}} = \sqrt{\frac{(5-x)(7x+70)^2}{4(x+5)}}$$

e

$$\sqrt{\frac{5x^2-x^3}{20+4x}} = \sqrt{\frac{x^2(5-x)}{4(x+5)}}$$

la (11) può assumere la forma

$$45-x-(4x+35)\sqrt{\frac{5-x}{x+5}}=16$$

equazione che, razionalizzata e privata del denominatore, diviene

$$17x^3-147x^2+376x-1290=0 \quad (12)$$

Per ridurre all'unità il coefficiente del termine di terzo grado, - cosa che allora rappresentava il primo passo della risoluzione di un'equazione -,

Monforte opera la trasformazione $x \rightarrow \frac{x}{17}$. In tal modo la (12) diviene

$$17\frac{x^3}{17^3} - 147\frac{x^2}{17^2} + 376\frac{x}{17} - 1920 = 0$$

che, moltiplicata per 17^2 , dà

$$x^3-147x^2+6392x-554880=0 \quad (13)$$

Poiché il polinomio al primo membro della (13) è divisibile per $x-40$, questa ammette la radice $x=40$ e la (12) la radice $x=\frac{40}{17}$, che rappresenta il valore della somma dei medi che Gloriosi intendeva determinare.

Il matematico napoletano fa notare che questo valore di x è l'unico accettabile perché le altre due radici dell'equazione (12) sono immaginarie, come si può facilmente constatare dall'equazione $x^2+187x+13872=0$ ottenuta dividendo la (13) per $x-40$. Egli dunque può a ragione concludere che:

"non solum autem Gloriosus minime novit hujus problematis aequationem unam solam radicem veram admittere, et reliquas duas esse tantum imaginarias, verum

etiam deceptus in falsam aequationem incidit, unde labor inextricabilis illum coegit munus hoc, ut ipse ait, ociosis ablegare²⁴.

A questo punto egli mostra come questo stesso problema possa essere risolto molto più velocemente ed elegantemente se, invece di utilizzare gli zetetici di Viète, si segue la via cartesiana riducendolo alla risoluzione di un sistema di due equazioni in due incognite. Detto, infatti, x il primo numero e y la ragione della progressione geometrica, le due condizioni del problema si traducono nelle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}x+xy+xy^2+xy^3&=10 \\ 8x+4xy+3xy^2+xy^3&=16\end{aligned}$$

le quali possono scriversi rispettivamente nella forma

$$x=\frac{10}{1+y+y^2+y^3} \qquad x=\frac{16}{8+4y+3y^2+y^3}$$

il cui confronto fornisce l'equazione

$$3y^3-7y^2-36y-288=0 \qquad (14)$$

che, fatta la trasformazione $y \rightarrow \frac{y}{3}$, e moltiplicato tutto per 3^2 , diviene

$$y^3-7y^2-36y-288=0 \qquad (15)$$

Poiché il polinomio a primo membro è divisibile per $y-12$, la (15) ammette la radice $y=12$, e conseguentemente la (14) ammette la radice

$$y=\frac{12}{3}=4.$$

Con tale valore della y , si ricava immediatamente

$$x=\frac{10}{1+4+16+64}=\frac{2}{17}$$

per cui i quattro numeri in progressione geometrica cercati sono:

$$\frac{2}{17} \quad \frac{8}{17} \quad \frac{32}{17} \quad \frac{128}{17}$$

Né esistono altre soluzioni, perché l'equazione $y^2+5y+24=0$ che risulta dalla divisione della (15) per $y-12$, ammette radici immaginarie.

²⁴ *Ibid.*, p. 15.

La risoluzione del problema di Luca Pacioli faceva emergere immediatamente la questione della riducibilità delle equazioni, questione fondamentale per la risoluzione delle equazioni di grado superiore al secondo nonché per la costruzione dei problemi solidi. Poiché, come avevano insegnato Descartes, Sluse, Viviani ed altri ancora, “problematis autem naturam ostendet aequatio, quae ab illo originem trahit”²⁵, per stabilire la natura del problema, bisognava saper riconoscere se l’equazione cui esso conduceva era riducibile o meno, e, in caso positivo, saperla ridurre.

Monforte parla di vari matematici che, non riuscendo a riconoscere la natura vera del problema, avevano inutilmente cercato di risolvere per via elementare problemi solidi, come l’inserzione di due medie proporzionali o la trisezione dell’angolo. Tra questi Carlo Renaldini che aveva affermato potersi inscrivere in una circonferenza, con riga e compasso, ogni poligono regolare²⁶. Monforte fa vedere che ciò sicuramente non è possibile per quanto riguarda l’ettagono regolare. Ricorda, infatti, che il problema dell’iscrizione di tale poligono nella circonferenza conduce all’equazione

$$x^{12}-13x^{10}+65x^8-157x^6+189x^4-105x^2+21=0 \quad (16)$$

oppure, se si usa il metodo delle sezioni angolari, all’equazione

$$x^{10}-12x^8+54x^6-112x^4+105x^2-35=0 \quad (17)$$

Essendo i polinomi al primo membro delle (16) e (17) entrambi divisibili per $x^6-7x^4+14x^2-7$, queste equazioni possono ridursi alle seguenti

$$(x^6-6x^4+9x^2-3)(x^6-7x^4+14x^2-7)=0$$

$$(x^4-5x^2+5)(x^6-7x^4+14x^2-7)=0$$

Ma l’equazione $x^6-7x^4+14x^2-7=0$ non è ulteriormente riducibile; dunque il problema dell’iscrizione dell’ettagono regolare in una circonferenza non è un problema piano.

Monforte non mostra la via da lui seguita per la riduzione delle equazioni (16) e (17). In realtà il caso in esame è piuttosto semplice potendosi ottenere la riduzione di dette equazioni col metodo dei divisori del termine noto. Monforte però è consapevole che in molti casi tale

²⁵ *Ivi.*

²⁶ C. Renaldini, *De compositione et resolutione mathematica libri duo*, Patavii, Typis ac impensis Haeredum Pauli Frambotti Bibliopolae, 1668, tomo III, p. 367. È noto che ciò si può fare solo se il numero n dei lati del poligono è tale che 2^n+1 è primo. Su Carlo Renaldini (1615-1698), dal 1649 professore di Filosofia all’Università di Pisa, e poi dal 1667 fino alla sua morte, all’Università di Padova, cfr. A. Brigaglia, *Algèbre et géométrie dans l’oeuvre de Carlo Renaldini*, in E. Festa V. Jullien M. Torrini, (curatori), *Géométrie, atomiste et vide dans l’école de Galilée*, Paris, ENS Éditions, 1999.

operazione può rivelarsi alquanto difficile soprattutto per persone non particolarmente versate nella scienza analitica. Per questa ragione mostra un metodo generale che consiste nell'esprimere l'equazione data $H(x)=0$ nella forma $H(x)=U(V(x))$ con U e V polinomi di grado inferiore ad H in modo che la risoluzione dell'equazione $H(x)=0$ sia ricondotta a quella dell'equazione $U(y)=0$, essendo $y=V(x)$. Si tratta, in effetti, del metodo adoperato da Ludovico Ferrari nella risoluzione dell'equazione di 4° grado che Monforte mostra applicandolo direttamente alla risoluzione del problema

"Invenire duas quantitates, quae additae producto sub ipsis efficiant 136, subtractae vero a summa suorum quadratorum relinquant 234".

Dette x , y le due grandezze richieste, il problema è risolto dal sistema di equazioni

$$\begin{aligned}xy+x+y &= 136 \\ x^2+y^2-x-y &= 234\end{aligned}$$

dalle quali, eliminata la y , si ottiene l'equazione di 4° grado

$$x^4+x^3-233x^2-876x+18126=0 \quad (18)$$

Monforte risolve questa equazione applicando la "regola" di Ferrari che, per la generica equazione di 4° grado scritta nella forma

$$x^4+px^3-qx^2-rx-s=0$$

consiste nel risolvere preliminarmente l'equazione di 3° grado (*risolvente di Ferrari*)

$$y^3+qy^2+(4s-pr)y+(4qs-rp^2s)=0$$

e nel sostituire poi il valore della y trovato nelle due equazioni di 2° grado

$$x^2+\left(\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q+\frac{1}{4}p^2+yx}\right)+\frac{1}{2}y \pm \frac{r+\frac{1}{2}py}{2\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2+y}}=0$$

Nel caso della (18) è $q=233$, $4s=-72504$, $-pr=-876$, $4sq=-16893432$, $-r^2=-767376$ e $p^2s=-18126$. Dunque, la risolvente di 3° è l'equazione

$$y^3+233y^2-73380y-17678934=0$$

che ammette la radice $y=273^{27}$, in corrispondenza del quale si hanno le due equazioni di secondo grado

$$x^2-22x+114=0$$

$$x^2+23x+159=0$$

la prima delle quali ammette le radici $x=11\pm\sqrt{7}$, che sono le uniche che risolvono il problema dal momento che la seconda ammette radici immaginarie.

Monforte fa vedere che questo problema può essere risolto più velocemente se si pongono le grandezze cercate alla maniera di Diofanto rispettivamente uguali a $x-y$ e a $x+y$. In tal caso, infatti, si ottiene il sistema di equazioni

$$x^2+2x-y^2=136$$

$$2x^2-2x+2y^2=234$$

dal quale, eliminando y^2 , si ha

$$x^2+\frac{1}{2}x=\frac{506}{4}$$

Per liberare quest'equazione dai denominatori, si opera la sostituzione $x=x/2$, e si moltiplica tutto per 2^2 ottenendo l'equazione in forma canonica

$$x^2+2x=506$$

che ammette le radici $x=22$ e $x=-23$. Quindi le radici della (18) saranno $x=11$ e $x=-\frac{23}{2}$. In relazione alla prima di dette radici si ottiene $y=\pm\sqrt{7}$.

La seconda, invece darà valori immaginari per la y . Ne segue dunque che i numeri cercati sono $x-y=11-\sqrt{7}$, e $x+y=11+\sqrt{7}$, come già trovato in precedenza.

Con questo stesso procedimento Monforte mostra come si possa risolvere facilmente un problema "quod Clavius existimavit vis, aut nullo modo absque auxilio figurae geometricae solvi posse"

"Invenire duos numeros, quorum summa a summa quadratorum ex ipsis procreatorum subtracta relinquant 78, addita vero ad numerum ex eorum multiplicatione productum faciat 39"²⁸;

²⁷ Monforte dice che questa radice si può ricavare o col metodo di risoluzione delle equazioni cubiche di Viète, o con quello dei divisori dell'ultimo termine.

²⁸ C. Clavius, *Algebra*, Romae, apud Bartholomaeum Zanettum, 1608, Cap. 31, Propositio, 58

Bisogna dunque trovare due numeri la cui somma sottratta alla somma dei loro quadrati dia 78 e sommata al loro prodotto dia 39. Se i due numeri sono $x-y$ e $x+y$, il problema è risolto dal sistema delle due equazioni

$$x^2+y^2-x=39$$

$$x^2+2x-y^2=39$$

ossia dall'equazione di 4° grado

$$y^4+\frac{3}{4}y^2-\frac{351}{4}=0$$

Per eliminare i denominatori Monforte opera la trasformazione $y^2 \rightarrow \frac{y}{4}$, e moltiplica tutto per 4² ottenendo l'equazione $y^2+3y-1404=0$ che ammette la radice $y=36^{29}$. Essendo dunque $y^2=\frac{y}{4}=9$, si hanno le radici cercate $y=\pm 3$.

Pertanto i valori delle grandezze cercate saranno $x+y=9$ e $x-y=3$. Monforte fa osservare che se si fossero applicate le condizioni richieste dal problema ponendo uguali a x e y i due numeri da trovare, si sarebbe giunti all'equazione di 4° grado completa di tutti i suoi termini

$$x^4+x^3-77x^2-273x+1404=0 \quad (19)$$

che si scinde nelle due equazioni di 2° grado

$$x^2+13x+52=0 \quad x^2-12x+27=0 \quad (20)$$

delle quali, la prima ammette radici immaginarie, e la seconda fornisce i valori 3 e 9 come prima trovati.

Per dividere l'equazione (19) nelle (20) lo scienziato napoletano dice di aver usato un metodo simile a quello di Hudde³⁰, ma poiché questo autore volutamente aveva omesso il procedimento analitico da lui seguito, egli ne aveva trovato uno nuovo. Questo, nelle linee generali, non differisce da quello di Ferrari, di Viète e di Descartes consistente nel completare opportunamente, mediante l'introduzione di una nuova incognita y , ambo i membri dell'equazione affinché diventino dei quadrati, dei quali estrarre poi la radice quadrata. E tuttavia Monforte introduce in questo algoritmo un elemento di assoluta novità. Diversamente da quanto fatto da tutti i matematici che fino ad allora si erano cimentati nella risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado, egli non ricorre alla preliminare eliminazione del termine di grado $n-1$ (in questo caso di 3° grado), la cosiddetta

²⁹ Monforte considera la sola radice positiva perché quella negativa fornisce due valori immaginari per y .

³⁰ Cfr. Regula XX del *De aequationum reductione*, in R. Descartes, *Geometria*, pp. 494-495.

expurgatio, ma applica il suo procedimento direttamente all'equazione completa.

Parte, infatti, dall'equazione $x^4 + px^3 - qx^2 - rx - s = 0$ ³¹ che scrive nella forma

$$x^4 + px^3 = qx^2 + rx + s \quad (21)$$

considera il quadrato di $x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{2}$

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{2}\right)^2 = x^4 + px^3 + \left(\frac{1}{4}p^2 + y\right)x^2 + \frac{1}{2}pyx + \frac{1}{4}y^2$$

ed aggiunge ad ambo i membri della (21) $\left(\frac{1}{4}p^2 + y\right)x^2 + \frac{1}{2}pyx + \frac{1}{4}y^2$ ottenendo

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(q + \frac{1}{4}p^2 + y\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}py + r\right)x + \frac{1}{4}y^2 + s \quad (22)$$

Pone poi $\left(x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{2}\right)^2 = (vx+z)^2 = v^2x^2 + 2vzx + z^2$ e dal confronto con i termini del secondo membro della (22) ottiene

$$\begin{aligned} v^2 &= q + \frac{1}{4}p^2 + y & v &= q + \frac{1}{4}p^2 + y \\ 2vz &= \frac{1}{2}py + r & z &= \frac{\frac{1}{2}py + r}{2\sqrt{q + \frac{1}{4}p^2 + y}} \end{aligned}$$

e quindi

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2 + y}\right)x + \frac{1}{2}y \pm \frac{\frac{1}{2}py + r}{2\sqrt{q + \frac{1}{4}p^2 + y}} = 0$$

³¹ Ciò non toglie generalità alla sua trattazione. Egli stesso, comunque, alla fine della sua discussione, aggiunge: "Cum signa secundae partis aequationis quadrato-quadratae mutassem, ut fieret $x^4 + px^3 = qx^2 - rx - s$, in ipsam Huddenii regulam incidi, quanquam non ausim affirmare hanc viam illum tenuisse, quippe ingenosissimo Viro mille aliae in promptu fuerint, quae ad eandem metam ducunt", *De problematum*, cit. pp. 24-25.

Quanto alla y , essendo

$$(vx+z)^2 = \left(q + \frac{1}{4}p^2 + y\right)x^2 + \frac{r^2 + rpy + \frac{1}{4}p^2y^2}{q + \frac{1}{4}p^2 + y} + \left(\frac{1}{2}py + r\right)x$$

confrontando con la (21) si ha:

$$\begin{aligned} \left(q + \frac{1}{4}p^2 + y\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}py + r\right)x + \frac{1}{4}y^2 + s = \\ = \left(q + \frac{1}{4}p^2 + y\right)x^2 + \frac{r^2 + rpy + \frac{1}{4}p^2y^2}{q + \frac{1}{4}p^2 + y} + \left(\frac{1}{2}py + r\right)x \end{aligned}$$

ossia

$$\left(\frac{1}{4}y^2 + s\right)\left(q + \frac{1}{4}p^2 + y\right) = r^2 + rpy + \frac{1}{4}p^2y^2$$

che fornisce la *risolvente di Ferrari*

$$y^3 + qy^2 + (4s - rp)y + (4qs - r^2 + sp^2) = 0$$

Il passo successivo sarebbe quello di risolvere le equazioni di più alto grado. Monforte dice che

“Artificio semel detecto, non erit difficile altiorum etiam potestatum aequationes, cum possibile est, reducere”

Egli, dunque, appare consapevole che non sempre è possibile risolvere un'equazione di grado superiore al quarto. E tuttavia ritenendo come Descartes e Fermat, che, “cum possibile est”, ogni equazione di grado n ammetta una risolvente di grado $n-1$, confida di poter, in tal caso, risolvere equazioni di 5° e 6° grado. Elevando, infatti, un'equazione di 5° grado al 6° grado, egli ritiene che questa possa ammettere una risolvente di 5° grado che consenta di dividere l'equazione di 6° grado in due di terzo grado, o una di 2° e l'altra di 4°, e quindi di trovarne le radici.

“Similis consideratio – aggiunge – in altioribus etiam gradibus habenda erit, ad hoc ut maiores potestates utriusque partis, pares habeant dimensiones”³².

³² *Ibid.* p. 25

Il passo dalla risoluzione alla costruzione delle equazioni era breve. Già Descartes aveva avvertito che laddove gli algoritmi algebrici si rivelavano inefficaci a determinare le radici di un'equazione non esisteva altro mezzo che ricorrere alla via geometrica della costruzione delle equazioni, metodo che consente di determinare le radici di un'equazione come ascisse dei punti di intersezione di due apposite curve rappresentate da equazioni alle quali si può opportunamente ridurre l'equazione di partenza. Data la sua grande versatilità, per più di un secolo la costruzione delle equazioni appassionò i matematici di ogni parte d'Europa che, in gara tra loro, cercarono di trovare le curve più semplici possibili per costruire un determinato problema³³. Si trattava di rispettare il criterio di economicità stabilito da Pappo nelle sue *Collezioni matematiche* e che Descartes aveva interpretato alla luce dell'*ars analytica* algebrica, specificando essere le curve più semplici possibili quelle rappresentate da equazioni di grado più basso³⁴. La scelta di tali curve fu argomento di un'aspra polemica tra Descartes e Fermat. Il primo aveva costruito le equazioni di terzo e quarto grado mediante un cerchio e una parabola, e quelle di quinto e sesto grado, mediante un cerchio e una parabola cubica, lasciando intendere di poter utilizzare sempre il cerchio come una delle due curve anche per equazioni di più alto grado. Fermat aveva elaborato, invece, un metodo generale secondo il quale un'equazione di grado $2n$ era costruibile mediante due curve di ordine n . Egli giudicava il suo metodo migliore di quello di Descartes che, a suo parere per le equazioni dal settimo grado avrebbe avuto bisogno di curve di ordine più elevato delle sue³⁵. Monforte apprezzò più la via di Fermat che quella di Descartes, e ciò probabilmente perché quest'ultimo teneva nascosta la parte analitica della sua costruzione, passo essenziale per poter procedere alla riduzione dell'equazione nelle due rappresentanti le curve costruenti il problema. Comunque egli non aveva trovato altre motivazioni per introdurre l'argomento se non quelle espresse da Descartes:

³³ Cfr. H.J.M. Bos, *Arguments on motivation in the rise and decline of a mathematical theory; the "Construction of Equations", 1637-ca. 1750*, "Archive for History of Exact Sciences", 1984, vol. 30, pp. 331-380.

³⁴ Descartes affrontò l'argomento della costruzione delle equazioni nel terzo libro della sua *Géométrie*, Leyde, Ian Maire, 1637.

³⁵ Cfr. P. de Fermat, *De solutione problematum geometricorum per curvas simplicissimas, et uniusque generi proprie convenientes. Dissertatio tripartita*, in *Varia opera mathematica*, cit., p. 111.

“Cum autem constiterit aequationum radices nullis numeris posse explicari, ad lineas proprias, et problematis constructioni idoneas recurremus, quas ipsae aequationes ostendunt, cuius rei specimen ex Fermatio afferemus”.³⁶

Per costruire l'equazione cubica irriducibile

$$x^3 + a^2x = b^3$$

Monforte la innalza innanzitutto al 4° grado³⁷ moltiplicando tutto per x e poi isola a un membro il termine di grado massimo

$$x^4 = a^2x^2 + b^3x \quad (23)$$

Considera poi il quadrato del binomio $x^2 - d^2$

$$(x^2 - d^2)^2 = x^4 - 2d^2x^2 + d^4$$

e aggiunge ad ambo i membri della (23) $-2d^2x^2 + d^4$ affinché al primo membro compaia proprio il quadrato di $x^2 - d^2$

$$x^4 - 2d^2x^2 + d^4 = d^4 - 2d^2x^2 - a^2x^2 + b^3x \quad (24)$$

Pone quindi $n^2 = 2d^2 + a^2$, in modo che la (24) si scrive

$$(x^2 - d^2)^2 = d^4 - n^2x^2 + b^3x$$

ed eguaglia ambo i membri a n^2y^2 , ottenendo le due equazioni

$$(x^2 - d^2)^2 = n^2y^2 \quad d^4 - n^2x^2 + b^3x = n^2y^2$$

ossia

$$x^2 - d^2 = ny \quad x^2 + y^2 = \frac{b^3}{n^2}x + \frac{d^4}{n^2}$$

che rappresentano rispettivamente una parabola e un cerchio³⁸.

Non diversamente per la costruzione di un'equazione di 4° grado. Dopo averla scritta nella forma

$$x^4 = d^4 - a^2x^2 - b^3x \quad (25)$$

³⁶ *De problematum*, cit., p. 26. Anche la classificazione delle curve riportata da Monforte era quella di Descartes, secondo la quale sono problemi piani quelli che conducono ad equazioni di primo o secondo grado, solidi quelli che conducono ad equazioni di terzo o quarto grado, supersolidi, quelli che conducono ad equazioni di quinto o sesto grado.

³⁷ Si trattava di un procedimento canonico nella costruzione delle equazioni per cui ogni equazione di grado dispari veniva innalzata al grado immediatamente superiore.

³⁸ Monforte mette la seconda di queste due equazioni nella forma più semplice

$z^2 + y^2 - r^2 = 0$, operando la trasformazione $x = z + \frac{b^3}{2n^2}$ e ponendo poi $r^2 = \frac{b^6}{4n^2} + \frac{d^4}{n^2}$.

considera il quadrato di $x^2 - c^2$ ed aggiunge ad ambo i membri della (25) $-2cx^2 + c^4$, sicché questa assumerà la forma

$$(x^2 - c^2)^2 = d^4 - (a^2 + 2c^2)x^2 + b^3x + c^4$$

Pone quindi $a^2 + 2c^2 = n^2$ ed uguaglia ambo i membri dell'equazione a n^2y^2 ottenendo la parabola

$$x^2 - c^2 = ny^{39}$$

e il cerchio

$$x^2 + y^2 - \frac{b^3}{n^2}x = \frac{c^4}{n^2}$$

Per quanto riguarda la costruzione di un'equazione di 5° grado, Monforte si limita a indicare la via da seguire:

“At si habeatur aequatio quintae potestatis, attollatur ad sextam, atque ita collocatis terminis, ut in utraque aequationis parte, maiores potestates pares habeant dimensiones, effingatur radix quadrata, ea ratione ut altiores quantum fieri potest, aequationis potestates tollantur, quod facile fiet si a nova radice efformemus quadratum, cuius termini cum terminis aequationis comparati, illos in radice ponendos praeferibant, immo si quosdam abesse velimus relictis intermediis, sufficet terminos in radice ponendos elicere per comparisonem illorum, quos tollere est in animo: atque ita per intersectiones duarum curvarum, quarum altera secundi, altera tertii est gradus, radices explicabuntur; et similis in altioribus processus”.⁴⁰

Dunque si deve innalzare l'equazione al 6° grado, completare opportunamente i suoi termini in modo che al primo membro compaia un quadrato, uguagliare i suoi membri così ottenuti ad un quadrato opportuno in modo da scindere l'equazione in due altre, estrarre, infine, la radice quadrata di ambo i membri della prima di queste equazioni. Si otterrà così l'equazione di un cerchio e di una cubica che intersecate costruiscono le radici dell'equazione data. E questa è ancora la via da seguire per ottenere la costruzione di equazioni di più alto grado. Monforte non fornisce alcun esempio di costruzione di equazioni di grado superiore al quarto. In realtà il suo procedimento si può bene applicare alla costruzione delle equazioni di 5° grado che, moltiplicate per l'incognita divengono equazioni di 6° grado prive di termine noto.

Facciamo osservare che Monforte, come Fermat, omette la parte geometrica della costruzione; tutto il suo procedimento si esaurisce nella parte analitica, parte che, invece, Descartes aveva tenuta nascosta. È evidente che per l'analista napoletano l'aspetto più rilevante del problema è quello di determinare le equazioni delle curve necessarie alla costruzione.

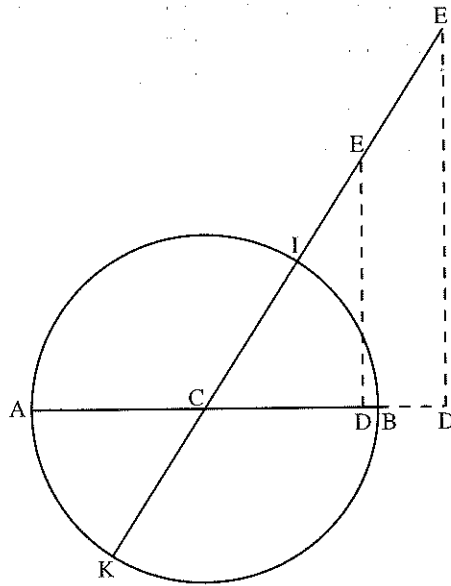
³⁹ Monforte non prende in considerazione la radice negativa $-(x^2 - c^2)$.

⁴⁰ *De problematum*, cit., p. 28.

Ma se ciò poteva bastare per curve che, come le coniche, alcune cubiche e alcune quartiche, si sapevano disegnare, certamente non era sufficiente quando si trattava di dover operare nella costruzione con curve di ordine più elevato.

Esaurito questo argomento, Monforte, per dimostrare che “impossibile quoque est, punctum, sive locum quaesitum determinare, ubi inventae aequationes ignotis quantitibus determinandis non sufficiunt”, passa alla risoluzione analitica della Proposizione 36 del III libro degli *Elementi* di Euclide enunciata sotto forma di luogo:

“Extra circulum AIB, quaeratur locus E, a quo ducta perpendicularis ED ad diametri etiam producti, si opus fuerit, punctum D, fiat quadratum ED aequale rectangulo KEI”⁴¹



Con riferimento alla figura, poiché

$$\begin{aligned} IE \cdot KE &= IE(2CI + IE) = 2CI \cdot IE + IE^2 = CI^2 + 2CI \cdot IE + IE^2 - CI^2 = (CI + IE)^2 - CI^2 = \\ &= CE^2 - CI^2 \end{aligned}$$

e

$$CE^2 = CD^2 + DE^2$$

⁴¹ *Ibid.*, p. 30.

detto a il raggio del cerchio, $x=DB$ la parte del diametro compresa tra il punto D, piede della perpendicolare condotta dal punto variabile E, e l'estremo B del diametro, $y=DE$, sarà

$$CE^2=(a-x)^2+y^2$$

e

$$CE^2-CI^2=-2ax+x^2+y^2$$

E poiché deve essere $IE \cdot KE=y^2$, si avrà

$$-2ax+x^2+y^2=y^2$$

e quindi $x=0$ e $x=2a$, ossia il luogo cercato è una retta tangente al cerchio nell'estremo del diametro, come previsto dalla Proposizione III, 36 degli *Elementi*.

Monforte considera poi il caso di alcuni problemi apparentemente impossibili, che invece, tradotti in equazione, mostrano che "verum ipsa eadem aequatio viam monstrat"⁴². Se, ad esempio si cercano tre numeri (razionali) a, b, c i cui quadrati siano in proporzione armonica, ovvero tali che la differenza tra il quadrato massimo e quello medio sta alla differenza tra il quadrato medio e quello minimo, come il quadrato massimo sta a quello minimo, cioè $\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2} = \frac{a^2}{c^2}$. Monforte assume che detti numeri abbiano la forma $1, x, 2x$, per cui ha

$$4x^2:1=(4x^2-x^2):(x^2-1) \quad (26)$$

proporzione dalla quale si ricava facilmente

$$x^2=\frac{7}{4}$$

Dunque il problema sembra essere impossibile avendo trovato per esso una soluzione non razionale. Ma se invertiamo i medi della (26) e applichiamo il componendo, otteniamo

$$4x^2+(4x^2-x^2):4x^2=(1+x^2-1):1$$

$$4x^2+(4x^2-x^2)=4x^4$$

nella quale il massimo quadrato, sommato alla differenza del massimo e del medio è uguale a un quadrato. Il problema, allora, si muta in quest'altro: *determinare due numeri quadrati tali che la loro differenza sommata al quadrato maggiore dia un quadrato*.

Inizialmente Monforte pone detti numeri rispettivamente uguali a $x+1$ e x . La differenza dei loro quadrati, $(x+1)^2-x^2=2x+1$, sommata al quadrato del maggiore deve dare un quadrato, cioè

⁴² *Ibid.*, p. 31.

$$(x+1)^2 - x^2 + (x+1)^2 = x^2 + 4x + 2 = \text{quadrato}$$

Seguendo Diofanto, Monforte mostra che basta prendere come quadrato $(x-h)^2$ (con h intero) perché, al variare di h si abbiano le infinite soluzioni del problema. In particolare comincia ad assumere $h=2$, per cui scrive:

$$x^2 + 4x + 2 = (x-2)^2$$

e quindi

$$x = \frac{1}{4}$$

Ne segue che $x^2 = \frac{1}{16}$ e $(x+1)^2 = \frac{25}{16}$, ossia, ridotti in interi, $x^2 = 1$ e $(x+1)^2 = 25$. 1 e 25 sono i due numeri quadrati richiesti. Infatti la loro differenza 24, sommata al quadrato maggiore, 25, dà 49, che è un numero quadrato.

Ritornando allora al problema di partenza, se invece dei numeri 1, x , $2x$, si scelgono i numeri 1, x , $5x$, la (26) si scriverà

$$25x^2 : 1 = 24x^2 : (x^2 - 1)$$

dalla quale si ricava $x^2 = \frac{49}{25}$, e quindi $x = \frac{7}{5}$.

Pertanto, i quadrati in progressione armonica saranno 1, $\frac{49}{25}$, 49, ossia gli interi 25, 49, 1225.

Ma se invece di $h=2$ si fosse assunto $h=3$ si sarebbe trovata la terna di quadrati 14161, 25921, 152881; e così di seguito per altri valori di h .

Monforte risolve, poi, un problema proposto da Fermat e da questo giudicato difficilissimo:

“Invenire triangulum rectangulum, ut tam hypotenusa, quam unum ex lateribus, detracta area faciat quadratum”⁴³

A tale fine fa precedere la risoluzione del problema da una considerazione sul principio di omogeneità di Viète, secondo il quale il problema sarebbe impossibile, “quod dissimilium natura non patitur, ut mutuo addi, vel haec ab illis detrahi possint”. Non è possibile sommare o sottrarre enti geometrici di differente dimensione, nel caso in esame lati e aree. Monforte riprende un risultato fondamentale sancito da Descartes all’inizio della sua *Géométrie*, ossia che una grandezza z^n , qualunque sia n , se riguardata come numero puro, può rappresentare una qualsiasi grandezza indipendentemente dalla dimensione geometrica indicata da n , e quindi anche la lunghezza di un segmento. In ogni caso, dovendo fare la

⁴³ *Ibid.* p. 32-33. Il problema è proposto, ma non risolto, da Fermat nelle sue *Osservazioni su Diofanto*, cit., p. 95.

somma $z^n + z^m$, con $n > m$, se si vuole ristabilire il principio di omogeneità, non si deve fare altro che moltiplicare z^m per 1^{n-m} , operazione che non muta il valore numerico di z^m , ma che rende simili le due grandezze da sommare. Con questa argomentazione, Monforte ritiene priva di ogni fondamento l'asserzione di alcuni secondo la quale "complura occurrere in mathematicis, quae quidem aliena sunt a physica ratione"⁴⁴. Per lui la natura delle cose è unica; sicché non è possibile ammettere come vero in un caso ciò che non lo è in un altro. La questione in esame, che poteva apparire avere del miracoloso, stava a dimostrare ancora una volta la capacità dell'analisi di indicare comunque la via per trovare cose possibili, laddove, invece, talvolta, la sintesi geometrica falliva.

Quanto alla risoluzione del problema, Monforte indica con $\frac{y}{r}$ l'ipotenusa e con $\frac{z}{r}$ e $\frac{x}{r}$ i due cateti e applica le condizioni del problema secondo cui $yr - \frac{1}{2}xz = \text{quadrato}$ e $zr - \frac{1}{2}xz = \text{quadrato}$. Per semplicità pone questi due quadrati entrambi uguali a z^2 , per cui

$$yr - \frac{1}{2}xz = z^2 \qquad zr - \frac{1}{2}xz = z^2$$

Confrontando i primi membri di queste due equazioni si ottiene:

$$yz + \frac{1}{2}yx - \frac{1}{2}xz \qquad (27)$$

che dovrà essere un quadrato. A questo punto Monforte fa notare che il problema di partenza si è mutato nel seguente:

"Invenire triangulum rectangulum, cuius hypotenusa y , si ducatur in aggregatum ex uno latere z , et dimidio alterius $\frac{1}{2}x$, atque ex producto auferatur area $\frac{1}{2}xz$ faciat quadratum"⁴⁵.

Per risolvere questo problema Monforte esprime i lati del triangolo rettangolo alla maniera di Diofanto mediante la terna pitagorica $a^2 + b^2$, $2ab$, $a^2 - b^2$ con a , b "numeri componentes" da determinare. Tale determinazione avviene per tentativi. Pone, infatti, inizialmente $a = x + 1$ e $b = 1$. Con tale scelta l'ipotenusa del triangolo sarà $a^2 + b^2 = x^2 + 2x + 2$ e i due cateti

⁴⁴ *Ivi.*

⁴⁵ *Ibid.*, p. 34.

rispettivamente $2ab=2x+2$ e $a^2-b^2=x^2+2x$. Sostituendo queste espressioni nella (27), scritta nella forma $yz+\frac{1}{2}x(y-z)$, si ha

$$(x^2+2x+2)(x^2+2x)+\frac{1}{2}(2x+2)2$$

che può scriversi

$$[(x^2+2x)^2+2(x^2+2x)+1]+2x+1$$

ossia

$$(x^2+2x+1)^2+2x+1$$

espressione che sarà certamente un quadrato per $x=-\frac{1}{2}$.

Questo valore della x , però, non è accettabile, perché, avendo assunto come “numeri componentes” $a=x+1$ e $b=1$, si avrà $a=\frac{1}{2}$ e $b=1$, con che il cateto $a^2-b^2=\frac{1}{4}-1$ risulterà negativo. Bisognerà pertanto scegliere diversamente i “numeri componenti”. Monforte assume $a=x+1$ e $b=2$ per cui trova che l'ipotenusa è $a^2+b^2=x^2+2x+5$, e che i due cateti sono rispettivamente $2ab=4x+2$ e $a^2-b^2=x^2+2x-3$. Ne segue che la (27) diviene

$$x^4+4x^3+6x^2+20x+1 \quad (28)$$

la quale deve essere un quadrato. A tale fine Monforte eguaglia la (28) a $(1+10x-x^2)^2$, cosa che conduce a un'equazione priva di termine noto e dei termini di primo e di quarto grado, cioè a un'equazione cubica contenente solo i termini di terzo e di secondo grado, facilmente riducibile a un'equazione di primo grado. Infatti, posto

$$x^4+4x^3+6x^2+20x+1=(1+10x-x^2)^2$$

si avrà

$$24x^3-92x^2=0$$

e quindi

$$x=\frac{23}{6}$$

Con tale valore di x , i “numeri componenti” saranno $a=\frac{29}{6}$, $b=2$, da cui

risulterà $y=\frac{985}{36}$, $z=\frac{697}{36}$, $x=\frac{696}{36}$, ovvero $y=985$, $z=697$, $x=696$. E poiché

$$r = z + \frac{1}{2}x = 1045, \text{ i tre lati del triangolo rettangolo saranno } \frac{y}{r} = \frac{985}{1045},$$

$$\frac{z}{r} = \frac{697}{1045}, \frac{x}{r} = \frac{696}{1045}, \text{ e l'area } \frac{1}{2} \frac{zx}{r^2} = \frac{242556}{1092025}.$$

Ne segue allora che la differenza tra l'ipotenusa e l'area sarà: $\frac{y}{r} - \frac{1}{2} \frac{zx}{r^2} = \frac{786769}{10920245}$, quadrato di $\frac{887}{1045}$, e la differenza tra il cateto $\frac{z}{r}$ e l'area sarà $\frac{z}{r} - \frac{1}{2} \frac{zx}{r^2} = \frac{485809}{10920245}$, quadrato di $\frac{697}{1045}$, come richiesto dal problema.

Riproducendo lo stesso svolgimento, Monforte risolve l'analogo problema proposto da Diofanto:

"Invenire triangulum rectangulum, cuius area, sive hypotenusae, sive alteri ex lateribus circa rectum addita, faciat quadratum"⁴⁶.

Nella risoluzione di questi ultimi problemi, come si è visto, è capitato che dovendo determinare un quadrato a cui eguagliare una data espressione, si è talvolta incorso in un'equazione che ammetteva una radice negativa e quindi non accettabile, data la natura del problema. Per questa ragione Monforte mostra un metodo, dovuto a Fermat, mediante il quale, per il problema in esame, si possono ricavare radici sempre positive⁴⁷.

Se si deve rendere uguale a un quadrato $x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 20x + 1$, e si sceglie per questo il trinomio $(x^2 + 2x - 1)^2$, si ottiene un'equazione che ammette la radice $x = -3$. Operando, allora, nel polinomio dato la sostituzione $x = x - 3$, questo diventa $x^4 - 8x^3 + 28x^2 - 40x + 4$ che porremo uguale a $(x^2 - 4x - 2)^2$. Avremo così l'equazione $16x^2 = 56x$, dalla quale si ricava $x = \frac{7}{2}$ e $x - 3 = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$. Monforte conclude dicendo che se volessimo altri valori della radice x , basterebbe porre nel polinomio prima trovato, $x^4 - 8x^3 + 28x^2 - 40x + 4$, $x = x + \frac{1}{2}$ e procedere come prima.

Nel libro V della sua Aritmetica, Diofanto aveva risolto il problema di "Trovare tre triangoli rettangoli numerici, le cui aree siano uguali". Questo problema era stato ripreso da Fermat che aveva trovato non solo i tre triangoli richiesti, ma anche un quarto delineando un metodo col quale

⁴⁶ Ibid. p. 35. Tale problema costituisce la Proposizione 17 del Libro VI dell'*Aritmetica* di Diofanto.

⁴⁷ P. de Fermat, *Appendice alla dissertazione di C.G. Bachet sulle doppie equazioni di Diofanto*, in *Osservazioni su Diofanto*, cit. pp. 103-104.

se ne sarebbero potuti trovare infiniti. Questo metodo viene ripreso e spiegato da Monforte nell'ultima delle questioni da lui presa in considerazione nella quale dimostra che, detti z , b , d rispettivamente l'ipotenusa e i cateti del primo triangolo, i lati del secondo triangolo si ricavano assumendo come "numeri componentes" z^2 e $2bd$. Infatti, con tali numeri si ottiene il triangolo rettangolo avente per ipotenusa $z^4 + 4b^2d^2$ e cateti $z^4 - 4b^2d^2$ e $4bdz^2$, ossia, dividendo tutto per $2b^2z - 2d^2z$,

$$\frac{z^4 + 4b^2d^2}{2b^2z - 2d^2z}, \quad \frac{z^4 - 4b^2d^2}{2b^2z - 2d^2z}, \quad \frac{4bdz^2}{2b^2z - 2d^2z}.$$

L'area di questo triangolo è data da

$$S = \frac{z^4 - 4b^2d^2}{2b^2z - 2d^2z} \cdot \frac{4bdz^2}{2b^2z - 2d^2z} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2bdz^6 - 8b^3d^3z^2}{4z^2(b^2 - d^2)^2} = \frac{2z^2bd(z^4 - 4bd)}{4z^2(b^2 - d^2)^2}$$

cioè

$$S = \frac{bd(z^4 - 4bd)}{2(b^2 - d^2)^2}$$

e poiché $z^4 = (b^2 + d^2)^2$, si ha che

$$S = \frac{bd(b^4 + 2b^2d^2 + d^4 - 4bd)}{2(b^2 - d^2)^2} = \frac{bd(b^2 - d^2)^2}{2(b^2 - d^2)^2} = \frac{bd}{2}$$

Allo stesso modo, se si assumeranno come "numeri componentes" quelli che esprimono l'ipotenusa e il doppio prodotto dei due cateti di questo triangolo, si troverà un altro triangolo rettangolo con la stessa area dei precedenti; e così di seguito all'infinito.

"Ex his satis, - conclude Monforte - manifestum fiet quando problema quaesitum possibile, vel impossibile est, ne vanis in laboribus exerceamur, et supervacaneum quidem esset plura superaddere, iis enim, quibus ad haec aditus patet, nihil invium, inaccessumque superest".⁴⁸

⁴⁸ *De Problematum*, cit. p. 42.

A note on Generalized Dedekind Groups

Nota di Emanuela Massarotti

Presentata dal Socio Francesco de Giovanni
(Adunanza del 2 marzo 2001)

Sunto. — Un sottogruppo H di un gruppo G si dice *c-normale* se esiste un sottogruppo normale N tale che $G = HN$ e $H \cap N$ è contenuto nel nocciolo di H in G . In questo articolo si studiano i gruppi in cui tutti i sottogruppi sono *c-normali*. In particolare, si caratterizzano tali gruppi nel caso periodico e nel caso localmente nilpotente.

Summary. — A subgroup H of a group G is called *c-normal* if there exists a normal subgroup N such that $G = HN$ and $H \cap N$ is contained in the core of H in G . Groups are considered in which all subgroups are *c-normal* in this paper. In particular, these groups are characterized under the condition that the group is periodic or locally nilpotent.

1 Introduction

A subgroup H of a group G is called *c-normal* if there exists a normal subgroup N of G such that $G = HN$ and $H \cap N$ is contained in the core H_G of H . Obviously all normal subgroups are *c-normal*, and it is also clear that a simple group cannot contain proper non-trivial *c-normal* subgroups. The requirement that every member of a certain relevant system of subgroups of a group is *c-normal* has a strong influence on the structure of the group. In fact, Wang [4] has proved that a finite group G is soluble if and only if every maximal subgroup of G is *c-normal*; in the same paper it is also shown that a finite group whose cyclic subgroups are *c-normal* is supersoluble. Other results on this subject can also be found in [1].

We shall say that a group G is a *c-Dedekind group* if every subgroup of G is *c-normal*, and the aim of this article is to obtain information on the structure of *c-Dedekind groups*. In particular, it will be proved that every *c-Dedekind group* is metabelian, and that in most cases locally nilpotent *c-Dedekind groups* are nilpotent with class at most 3.

Our notation is standard, and can be found in [3].

2 Statements and proofs

It is easy to see that if H is a c -normal subgroup of a group G , then H is also c -normal in every subgroup K of G such that $H \leq K$. Moreover, if N is a normal subgroup of a group G , a subgroup H/N of G/N is c -normal if and only if H is c -normal in G . It follows that the class of c -Dedekind groups is closed with respect to subgroups and homomorphic images. If G is any group, we shall denote by $X(G)$ the intersection of all maximal normal subgroups of G . Clearly $X(G)$ is a characteristic subgroup of G , and the factor group $G/X(G)$ is abelian. This subgroup will play a special role in our considerations.

Lemma 1 *Let G be a c -Dedekind group. Then every subgroup of $X(G)$ is normal in G .*

PROOF – Assume by contradiction that the statement is false, so that $X(G)$ contains a cyclic subgroup H which is not normal in G . Since H is c -normal in G , there exists a normal subgroup N of G such that $G = HN$ and $H \cap N \leq H_G$. Clearly N is a proper subgroup of G , and G/N is a cyclic non-trivial group. Let M/N be a maximal subgroup of G/N . Then $H \leq X(G) \leq M$, and hence $G = HN = M$. This contradiction proves the lemma. $\square$

Corollary 2 *If G is a c -Dedekind group, the factor group $G/Z(X(G))$ is abelian. In particular, every c -Dedekind group is metabelian.*

PROOF – Since all subgroups of $X(G)$ are normal in G , the factor group $G/C_G(X(G))$ is isomorphic to a group of power automorphisms of $X(G)$, and so it is abelian. Therefore

$$G' \leq X(G) \cap C_G(X(G)) = Z(X(G)),$$

and hence the factor group $G/Z(X(G))$ is abelian. $\square$

Our next result proves in particular that the converse of Lemma 1 holds in the class of periodic groups, so that periodic c -Dedekind groups are completely described.

Theorem 3 *Let G be a group such that $G/X(G)$ is periodic. Then G is a c -Dedekind group if and only if all subgroups of $X(G)$ are normal in G .*

PROOF — The necessity of the condition is proved by Lemma 1. Conversely, suppose that every subgroup of $X(G)$ is normal in G , and let H be any subgroup of G . As the group $G/X(G)$ is a direct product of subgroups of prime order, we have

$$G/X(G) = HX(G)/X(G) \times K/X(G)$$

for some normal subgroup K of G containing $X(G)$. Then $G = HK$ and $H \cap K = H \cap X(G)$ is a normal subgroup of G , so that $H \cap K$ is contained in H_G and H is c -normal in G . Therefore G is a c -Dedekind group. $\square$

Observe that the above arguments can be used to show that Theorem 3 also holds under the weaker assumption that all cyclic subgroups of G are c -normal.

Lemma 4 *Let G be a c -Dedekind group, and let H be any subgroup of G . Then H/H_G is a direct product of groups of prime order.*

PROOF — Let x be any element of infinite order of H , and consider a prime number p . As $\langle x^p \rangle$ is c -normal in G , there exists a normal subgroup N of G such that $G = \langle x^p \rangle N$ and $\langle x^p \rangle \cap N$ is contained in the core $\langle x^p \rangle_G$ of $\langle x^p \rangle$. Clearly $\langle x \rangle = \langle x^p \rangle (\langle x \rangle \cap N)$, so that $\langle x \rangle \cap N \neq \{1\}$, and then also $\langle x^p \rangle \cap N \neq \{1\}$. It follows that the core $\langle x \rangle_G$ of $\langle x \rangle$ is not trivial, and hence the coset xH_G has finite order. Thus H/H_G is a periodic group. Without loss of generality it can be assumed that $H_G = \{1\}$, so that in particular $H \cap X(G) = \{1\}$ by Lemma 1. Therefore $H \simeq HX(G)/X(G)$ is a periodic abelian group with trivial Frattini subgroup, and hence it is a direct product of subgroups of prime order. $\square$

Recall that a group G is *parasoluble* if it has a series of finite length with abelian factors on which every element of G induces a power automorphism. It follows from Corollary 2 that any c -Dedekind group is parasoluble, and so also hypercyclic. Thus locally nilpotent c -Dedekind groups are hypercentral.

Theorem 5 *Let G be a periodic c -Dedekind group containing no elements of order 2. If G is locally nilpotent, then it is nilpotent of class at most 3.*

PROOF — Since every periodic locally nilpotent group is the direct product of its Sylow subgroups, it can be assumed without loss of generality that G is a p -group for some odd prime p . As the group G is parasoluble,

it follows that G is nilpotent (see [2], Lemma 2.3). By Lemma 1 all subgroups of $X = X(G)$ are normal in G , so that X is abelian, and G acts on X as a group of power automorphisms. Assume first that X has infinite exponent, so that $[X, G] = \{1\}$ and hence $G' \leq X \leq Z(G)$.

Suppose now that X is not contained in $Z(G)$. Then X has finite exponent, and hence every p -group of power automorphisms of X is cyclic. As the factor group G/X has exponent p , it follows that $G/C_G(X)$ has order p , so that there exists an element g of G such that $G = \langle g, C_G(X) \rangle$ and $x^g = x^{1+p^{k-1}}$ for each element x of X . Clearly g acts trivially on X^p and X/X^p , so that X lies in $Z_2(G)$ and G has nilpotency class at most 3. $\square$

The consideration of the locally dihedral 2-group shows that in the above statement the condition that the group G has no involutions cannot be dropped out.

Theorem 6 *Let G be a non-periodic c -Dedekind group. If G is locally nilpotent, then it is nilpotent with class at most 3, and the factor group $G/Z(G)$ is periodic.*

PROOF — Let x be any element of infinite order of G . Then the core $\langle x \rangle_G$ is contained in $Z(G)$, and $\langle x \rangle / \langle x \rangle_G$ is finite with square-free order by Lemma 4. As G is generated by its elements of infinite order, it follows that $G/Z(G)$ is a periodic group. Thus $Z(G)$ is not periodic, so that the abelian group $G'Z(G)$ is also generated by elements of infinite order, and hence $G'Z(G)/Z(G)$ is a direct product of groups of prime order. Moreover, all subgroups of G' are normal in G by Lemma 1, so that $G'Z(G)/Z(G)$ is contained in the centre of $G/Z(G)$, and G' is a subgroup of $Z_2(G)$. Therefore the group G is nilpotent with class at most 3. $\square$

Corollary 7 *Let G be a torsion-free c -Dedekind group. If G is locally nilpotent, then it is abelian.*

PROOF — The factor group $G/Z(G)$ is periodic by Theorem 6, so that $G = Z(G)$ is abelian. $\square$

References

- [1] A. BALLESTER-BOLINCHES - Y. WANG - G. XIUYUN: "c-supplemented subgroups of finite groups", *Glasgow Math.J.* 42 (2000), 383–389.
- [2] S. FRANCIOSI - F. DE GIOVANNI: "Groups with many supersoluble subgroups", *Ricerche Mat.* 40 (1991), 321–333.
- [3] D.J.S. ROBINSON: "Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups", *Springer*, Berlin (1972).
- [4] Y. WANG: "c-normality of groups and its properties", *J.Algebra* 180 (1996), 954–965.

Emanuela Massarotti
Dipartimento di Matematica e Applicazioni
Università degli studi di Napoli Federico II
Complesso Universitario di Monte S. Angelo
Via Cintia
I 80126 (Italy)

A comparison result for a class of elliptic equations

Nota di Giuseppina Anatriello

Presentata dal Socio Guido Trombetti
(Adunanza del 4 maggio 2001)

Key words: isoperimetric inequality, rearrangements, comparison theorems.

Abstract In this paper we prove a comparison result for the Dirichlet problem

$$-\sum_{i,j}(a_{i,j}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_i(b_i(x)u)_{x_i} + \sum_i d_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

where $\sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq (H(\xi))^2$, being $H(\xi)$ a gauge function, $a_{i,j}$, b_i , $d_i \in L^\infty(\Omega)$, $c(x) \geq 0$.

Riassunto In questo lavoro si prova un risultato di confronto per il problema di Dirichlet

$$-\sum_{i,j}(a_{i,j}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_i(b_i(x)u)_{x_i} + \sum_i d_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

dove $\sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq (H(\xi))^2$, con $H(\xi)$ funzione gauge, e $a_{i,j}$, b_i , $d_i \in L^\infty(\Omega)$, $c(x) \geq 0$.

1 Introduction

Let us consider the following Dirichlet problem:

$$(1.1) \quad \begin{cases} -\sum_{i,j}(a_{i,j}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_i(b_i(x)u)_{x_i} + \sum_i d_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f, \\ u \in W_0^{1,2}(\Omega) \end{cases}$$

where $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, is an open bounded set, $a_{i,j}$, b_i , d_i , c are measurable functions such that:

- (i) $\sum_{i,j} a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq (H(\xi))^2$, where $H(\xi)$ is a gauge function (see section 2 for the definition) such that $\alpha|\xi| \leq H(\xi) \leq \beta|\xi|$, for all $x \in \mathbb{R}^n$, with α, β positive constants,
- (ii) $c(x) \geq 0$,
- (iii) $\sum_i b_i^2 \leq B^2$, with $B \geq 0$,
- (iv) $\sum_i d_i^2 \leq D^2$, with $D \geq 0$,
- and f is a measurable function.

It is well known that when $H(\xi) = |\xi|$ Schwartz symmetrization allow us to obtain sharp estimate of the solution $u(x)$ of problem (1.1) in terms of the solution of a suitable problem which is defined in a ball having the same measure as Ω and whose data are spherically symmetric. This result has been first obtained by Talenti in [13] when $b_i = d_i = 0$, and it has been extended either to linear elliptic equation with lower-order terms (see e.g. [14], [4]) or to more general situation like nonlinear equation (see e.g. [8], [9], [10], [12]), and non uniformly elliptic equation (see e.g. [5], [7], see also [15] for a wide bibliography).

In this paper we obtain a sharp estimate of the solution of the problem (1.1) comparing the solution $u(x)$ with the solution of the problem:

$$(1.2) \quad -\Delta v - \frac{B}{\alpha} \left(\frac{k_n}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n}} \sum_i \left(\frac{v x_i}{|x|} \right)_{x_i} + \frac{D}{\alpha} \left(\frac{k_n}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n}} \sum_i v_{x_i} \frac{x_i}{|x|} = f^\sharp, \quad a.e. x \in \Omega^\sharp$$

where ω_n is the measure of the unit ball of $\mathbb{R}^n$, k_n is the measure of $K^\circ = \{x : H^\circ(x) \leq 1\}$, H° being the support function of K (see section 2 for the definition), $\Omega^\sharp$ is the ball of $\mathbb{R}^n$ centered in 0 such that $|\Omega^\sharp| = |\Omega|$, $f^\sharp$ is the spherical decreasing rearrangement function of f (see section 2).

This result has been obtained in [2] when $b_i = d_i = c(x) = 0$. As in the case $H(\xi) = |\xi|$ the proof uses rearrangements of functions and geometrical properties of the level sets of the solution of problem (1.1). Here the main tool is a suitable isoperimetric inequality proved in [2].

2 Preliminaries

Let $H : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$ be a convex function satisfying the homogeneity property:

$$H(tx) = |t|H(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Furthermore, assume that H satisfies:

$$(2.1) \quad \alpha|\xi| \leq H(\xi) \leq \beta|\xi|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

for some positive constants $\alpha \leq \beta$. By (2.1) we can assume that the convex closed set

$$K = \{x : H(x) \leq 1\}$$

has measure $|K|$ equal to ω_n , where ω_n is the measure of the unit ball of $\mathbb{R}^n$. We will say that H is the *gauge function* of K .

If one defines the *support function* of K as

$$H^o(x) = \sup_{\xi \in K} (x, \xi)$$

then $H^o(x)$ is the gauge of the set:

$$K^o = \{x : H^o(x) \leq 1\}.$$

Finally we denote by k_n is the measure of K^o .

Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^n$. It is possible to give the following definition of total variation of a function $u \in BV(\Omega)$ with respect to gauge function H (see [1]):

$$(2.2) \quad \int_{\Omega} |Du|_H = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \sigma dx : \sigma \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n), H(\sigma) \leq 1 \right\}.$$

This yields the following "generalized" definition of perimeter of a set E with respect to H :

$$(2.3) \quad P_H(E; \Omega) = \int_{\Omega} |D\chi_E|_H = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \sigma dx : \sigma \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n), H^o(\sigma) \leq 1 \right\}.$$

The following co-area formula

$$(2.4) \quad \int_{\Omega} |Du|_H = \int_{[0, \infty[} P_H(\{u > s\}; \Omega) ds \quad \forall u \in BV(\Omega),$$

holds (see [1]).

Moreover if E is a set of finite perimeter then the isoperimetric inequality

$$(2.5) \quad P_H(E; \mathbb{R}^n) \geq n k_n^{\frac{1}{n}} |E|^{1-\frac{1}{n}}$$

holds (see [2]).

Finally if $u \in W^{1,1}(\Omega)$ then (see [1])

$$(2.6) \quad \int_{\Omega} |Du|_H = \int_{\Omega} H(Du) dx.$$

The co-area formula then gives, for any $u \in W^{1,1}(\Omega)$

$$(2.7) \quad -\frac{d}{dt} \int_{|u| > t} H(Du) dx = P_H(\{u > t\}; \Omega)$$

for almost every t .

We recall the definition of rearrangement of a function that we will use in what follows. If Ω is an open, bounded set of $\mathbb{R}^n$, let $\Omega^\sharp$ the ball of $\mathbb{R}^n$ centered at 0, whose measure is $|\Omega|$; we set $|\Omega^\sharp| = c_n R_\Omega^n$ where R_Ω is the radius of $\Omega^\sharp$ and c_n is the measure of the unit ball of $\mathbb{R}^n$. If $\phi \in L^1(\Omega)$ the function:

$$\mu(t) = |\{x \in \Omega : |\phi(x)| > t\}|, \quad t \geq 0$$

is the *distribution function* of ϕ and

$$\phi^*(s) = \sup\{t \geq 0 : \mu(t) \geq s\}, \quad s \in [0, |\Omega|]$$

is the *decreasing rearrangement* of ϕ . The *spherically symmetric decreasing rearrangement* (or *symmetrized function*) of $\phi(x)$ is defined by

$$\phi^\sharp(x) = \phi^*(c_n |x|^n), \quad x \in \Omega^\sharp.$$

In addition to the above rearrangements it is useful to consider the *increasing rearrangement* of ϕ , that is the function

$$\phi_*(s) = \phi^*(|\Omega|s), \quad s \in [0, |\Omega|]$$

likewise we define by

$$\phi_\sharp(x) = \phi_*(c_n |x|^n), \quad x \in \Omega^\sharp$$

the *spherically symmetric increasing rearrangement* of $\phi(x)$.

For an exhaustive statement of properties of rearrangements we refer to [3], [6], [11]; we just want to point out the Hardy inequality:

$$(2.8) \quad \int_{[0, |\Omega|]} f^*(s) g_*(s) ds \leq \int_{\Omega} |f(x) g(x)| dx \int_{[0, |\Omega|]} f^*(s) g^*(s) ds$$

where $f(x), g(x)$ are measurable functions.

3 The Main Theorem

In this section we will prove the comparison theorem arguing as in [4].

Theorem 3.1 *If the conditions (i), (ii), (iii), (iv) hold and the problem (1.2) has a solution $v(x) = v^{\sharp}(x)$, then the problem (1.1) has a solution $u(x)$.*

Moreover

$$u^*(s) \leq \left(\frac{\omega_n}{k_n}\right)^{\frac{2}{n}} v^*(s), \quad \forall s \in]0, |\Omega|].$$

Proof. In view of the definition of weak solution of (1.1), using for $h > 0, t > 0$ the following test functions:

$$\phi(x) = \begin{cases} h, & \text{if } |u| > t + h; \\ (|u| - t) \operatorname{sign} u & \text{if } t \leq |u| \leq t + h \\ 0, & \text{if } |u| \leq t \end{cases}$$

we have

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} \frac{1}{h} \int_{t < |u| \leq t+h} a_{i,j} u_{x_i} u_{x_j} dx - \sum_i \frac{1}{h} \int_{t < |u| \leq t+h} b_i u_{x_i} u dx = \\ &= \frac{1}{h} \int_{t < |u| \leq t+h} (f(x) - c(x)u - \sum_i d_i u_{x_i}) (|u| - t) \operatorname{sign} u dx + \\ & \quad \int_{|u| > t+h} (f(x) - c(x)u - \sum_i d_i u_{x_i}) \operatorname{sign} u dx. \end{aligned}$$

By the assumption (ii), letting h to tend to zero, obtain:

$$-\frac{d}{dt} \int_{|u| > t} (H(Du))^2 dx \leq -\frac{d}{dt} \sum_i \int_{|u| > t} b_i u_{x_i} u dx + \\ - \sum_i \int_{|u| > t} d_i u_{x_i} \text{sign} u dx + \int_{|u| > t} f(x) \text{sign} u dx$$

here we have used the fact that:

$$\frac{1}{h} \int_{t < |u| \leq t+h} (f(x) - c(x)u - \sum_i d_i u_{x_i})(|u| - t) \text{sign} u dx$$

goes to zero as h tend to zero.

Now, by Schwarz inequality, (i) and (iii), we have:

$$-\frac{d}{dt} \sum_i \int_{|u| > t} b_i u_{x_i} u dx \leq \frac{B}{\alpha} t \left(-\frac{d}{dt} \int_{|u| > t} H(Du) dx \right).$$

Moreover by (i) and (iv):

$$\sum_i \int_{|u| > t} d_i u_{x_i} \text{sign} u dx \leq \frac{D}{\alpha} \int_{|u| > t} H(Du) dx.$$

Thus we have from Hardy inequality (see (2.8)):

$$(3.1) \quad -\frac{d}{dt} \int_{|u| > t} (H(Du))^2 dx \leq \\ \leq \frac{B}{\alpha} t \left(-\frac{d}{dt} \int_{|u| > t} H(Du) dx \right) + \frac{D}{\alpha} \int_{|u| > t} H(Du) dx + \int_{[0, \mu(t)]} f^*(s) ds,$$

where $\mu(t)$ denotes the distribution fuction of $u(x)$.

By the isoperimetric inequality (2.5), the inequality (2.7) and Schwarz inequality we can obtain:

$$(3.2) \quad n k_n^{\frac{1}{n}} \mu(t)^{1-\frac{1}{n}} \leq -\frac{d}{dt} \int_{|u| > t} H(Du) dx \leq \\ \leq (-\mu'(t))^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{d}{dt} \int_{|u| > t} (H(Du))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

that gives:

$$(3.3) \quad 1 \leq (nk_n^{\frac{1}{n}})^{-1} \mu(t)^{\frac{1}{n}-1} (-\mu'(t))^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{d}{dt} \int_{|u|>t} (H(Du))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Thus by (3.1), (3.2) and (3.3) we can write:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \int_{|u|>t} (H(Du))^2 dx &\leq \frac{B}{\alpha} t (-\mu'(t))^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{d}{dt} \int_{|u|>t} (H(Du))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ (nk_n^{\frac{1}{n}})^{-1} \mu(t)^{\frac{1}{n}-1} (-\mu'(t))^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{d}{dt} \int_{|u|>t} (H(Du))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \int_{[0, \mu(t)]} f^*(s) ds. \end{aligned}$$

Hence:

$$\begin{aligned} (3.5) \quad \mu(t)^{1-\frac{1}{n}} (-\mu'(t))^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{d}{dt} \int_{|u|>t} (H(Du))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \\ &\leq \frac{B}{\alpha} t (\mu(t))^{1-\frac{1}{n}} + (nk_n^{\frac{1}{n}})^{-1} J \end{aligned}$$

for a.e. $t \in [0, \sup|u|]$, where

$$(3.4) \quad J = \frac{D}{\alpha} \int_{|u|>t} H(Du) dx + \int_{[0, \mu(t)]} f^*(s) ds.$$

We evaluate the term J defined in (3.4) using again (3.2) and (2.4), (2.6) and (2.7):

$$\begin{aligned} |J| &\leq \frac{D}{\alpha} \int_{[t, +\infty[} \left(-\frac{d}{ds} \int_{|u|>s} H(Du) dx \right) ds + \int_{[0, \mu(t)]} f^*(s) ds \leq \\ &\leq \frac{D}{\alpha} \int_{[t, +\infty[} (-\mu'(s))^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{d}{ds} \int_{|u|>s} (H(Du))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} ds + \int_{[0, \mu(t)]} f^*(s) ds = \\ &= \frac{D}{\alpha} \int_{[t, +\infty[} \psi(s) (\mu(s))^{\frac{1}{n}-1} (-\mu'(s)) ds + \int_{[0, \mu(t)]} f^*(s) ds \quad (3.6) \end{aligned}$$

where $\psi(t)$ denotes the function on the left hand side of (3.5).

Since $t\mu(t)^{1-\frac{1}{n}}$ converges as t goes to $+\infty$, we deduce that $\psi(t)$ is a bounded function; moreover by (3.5) and (3.6) we can write:

$$\begin{aligned}\psi(t) &\leq \frac{D}{\alpha}(nk_n^{\frac{1}{n}})^{-1} \int_{[t,+\infty[} \psi(s)(\mu(s))^{\frac{1}{n}-1}(-\mu'(s))ds + \\ &\quad + \frac{B}{\alpha}t(\mu(t))^{1-\frac{1}{n}} + (nk_n^{\frac{1}{n}})^{-1} \int_{[0,\mu(t)]} f^*(s)ds.\end{aligned}$$

By Gronwall's lemma we have:

$$(3.7) \quad \psi(t) \leq \exp\left(\frac{D}{\alpha}k_n^{-\frac{1}{n}}(\mu(t))^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$\int_{[t,+\infty[} \exp\left(\frac{D}{\alpha}k_n^{-\frac{1}{n}}(\mu(s))^{\frac{1}{n}}\right)\{(nk_n^{\frac{1}{n}})^{-1}f^*(\mu(s))(-\mu'(s)) + \frac{B}{\alpha}(s\mu(s))^{1-\frac{1}{n}}\}'\}ds.$$

Now from (3.2) we have:

$$\psi(t) \geq (-\mu'(t))^{-1}nk_n^{\frac{1}{n}}\mu(t)^{2-\frac{2}{n}}$$

hence using this inequality in (3.7):

$$nk_n^{\frac{1}{n}}\mu(t)^{2-\frac{2}{n}}(-\mu'(t))^{-1} \leq \exp\left(\frac{D}{\alpha}k_n^{-\frac{1}{n}}(\mu(t))^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$\int_{[0,\mu(t)]} \exp\left(-\frac{D}{\alpha}k_n^{-\frac{1}{n}}\sigma^{\frac{1}{n}}\right)[(nk_n^{\frac{1}{n}})^{-1}f^*(\sigma) + \frac{B}{\alpha}(u^*(\sigma)\sigma^{1-\frac{1}{n}})']d\sigma.$$

Consequently, setting $\mu(t) = s$, since $(u^*(\sigma)\sigma^{1-\frac{1}{n}})'$ goes to 0, integration by parts gives:

$$\begin{aligned}(3.8) \quad &-(u^*(s))' \leq \\ &\leq (n^2k_n^{\frac{2}{n}})^{-1}s^{-2+\frac{2}{n}} \exp\left(\frac{D}{\alpha}k_n^{-\frac{1}{n}}s^{\frac{1}{n}}\right) \int_{[0,s]} \exp\left(-\frac{D}{\alpha}k_n^{-\frac{1}{n}}\sigma^{\frac{1}{n}}\right)f^*(\sigma)d\sigma + \\ &\quad + \frac{B}{\alpha}(nk_n^{\frac{1}{n}})^{-1}u^*(s)s^{-1+\frac{1}{n}} + \\ &\quad + \frac{BD}{\alpha^2}(nk_n^{\frac{1}{n}})^{-2}s^{-2+\frac{2}{n}} \exp\left(\frac{D}{\alpha}k_n^{-\frac{1}{n}}s^{\frac{1}{n}}\right) \int_{[0,s]} \exp\left(-\frac{D}{\alpha}k_n^{-\frac{1}{n}}\sigma^{\frac{1}{n}}\right)u^*(\sigma)d\sigma.\end{aligned}$$

Let v be the solution of (1.2) which is spherically symmetric and decreasing, if v^* is the rearrangement of v of then:

$$(3.9) \quad -\left(\frac{\omega_n}{k_n}\right)^{\frac{2}{n}}(v^*(s))' = (n^2 k_n^{\frac{2}{n}})^{-1} s^{-2+\frac{2}{n}} \exp\left(\frac{D}{\alpha} k_n^{-\frac{1}{n}} s^{\frac{1}{n}}\right) \\ \int_{[0,s]} \exp\left(-\frac{D}{\alpha} k_n^{-\frac{1}{n}} \sigma^{\frac{1}{n}}\right) f^*(\sigma) d\sigma + \frac{B}{\alpha} (n k_n^{\frac{1}{n}})^{-1} v^*(s) s^{-1+\frac{1}{n}} + \\ + \frac{BD}{\alpha^2} (n k_n^{\frac{1}{n}})^{-2} s^{-2+\frac{2}{n}} \exp\left(\frac{D}{\alpha} k_n^{-\frac{1}{n}} s^{\frac{1}{n}}\right) \int_{[0,s]} \exp\left(-\frac{D}{\alpha} k_n^{-\frac{1}{n}} \sigma^{\frac{1}{n}}\right) v^*(\sigma) d\sigma.$$

Now we want in some way to compare u^* and v^* .

From (3.8) and (3.9) writing:

$$W(s) = \int_{[0,s]} \exp\left(-\frac{D}{\alpha} k_n^{-\frac{1}{n}} \sigma^{\frac{1}{n}}\right) \{u^*(\sigma) - \left(\frac{\omega_n}{k_n}\right)^{\frac{2}{n}} v^*(\sigma)\} d\sigma,$$

we have:

$$-(\exp\left(\frac{B+D}{\alpha} k_n^{-\frac{1}{n}} s^{\frac{1}{n}}\right) W')' \leq \\ \leq \frac{BD}{\alpha^2} (n k_n^{\frac{1}{n}})^{-2} s^{-2+\frac{2}{n}} \exp\left(\frac{D}{\alpha} k_n^{-\frac{1}{n}} s^{\frac{1}{n}}\right) W.$$

$$W(0) = W'(|\Omega|) = 0.$$

Now, the problem

$$-(\exp\left(\frac{B+D}{\alpha} k_n^{-\frac{1}{n}} s^{\frac{1}{n}}\right) Z')' = \\ = \frac{BD}{\alpha^2} (n k_n^{\frac{1}{n}})^{-2} s^{-2+\frac{2}{n}} \exp\left(\frac{D}{\alpha} k_n^{-\frac{1}{n}} s^{\frac{1}{n}}\right) Z$$

$$Z(0) = Z'(|\Omega|) = 0$$

has the following positive solution

$$\int_{[0,s]} \exp\left(-\frac{D}{\alpha} k_n^{-\frac{1}{n}} \sigma^{\frac{1}{n}}\right) \left(\frac{\omega_n}{k_n}\right)^{\frac{2}{n}} v^*(\sigma) d\sigma$$

hence by using the same arguments than [6] we obtain that the first eigenvalue of the following problem

$$\begin{aligned} & -(\exp(\frac{B+D}{\alpha} k_n^{-\frac{1}{n}} s^{\frac{1}{n}}) \phi')' = \\ & = \lambda \frac{BD}{\alpha^2} (n k_n^{\frac{1}{n}})^{-2} s^{-2+\frac{2}{n}} \exp(\frac{D}{\alpha} k_n^{-\frac{1}{n}} s^{\frac{1}{n}}) \phi \end{aligned}$$

$$\phi(0) = \phi'(|\Omega|) = 0$$

is greater than one; thus we can conclude (see [6] again) that:

$$W(s) \leq 0, \quad W'(s) \leq 0,$$

i.e.

$$u^*(s) \leq \left(\frac{\omega_n}{k_n}\right)^{\frac{2}{n}} v^*(s).$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. AMAR-G. BELLETTINI, *A notion of total variation depending on a metric with discontinuous coefficients*, Ann. I.H.P. An Non Lin., **11**, 1994, pp.91-133.
- [2] A. ALVINO-V. FERONE- P.L. LIONS- G. TROMBETTI, *Convex symmetrization and applications*, Ann. I.H.P. An Non Lin., **14**, 1997, pp.275-293.
- [3] A. ALVINO- P.L. LIONS- G. TROMBETTI, *On optimization problems with prescribed rearrangements*, Nonlinear Analysis T.M.A., **13**, 1989, pp.185-220.
- [4] A. ALVINO- P.L. LIONS- G. TROMBETTI, *Comparison results for elliptic and parabolic equations via symmetrization Schwarz symmetrization*, Ann. I.H.P. An Non Lin., **7**, 1990, pp.37-65.
- [5] A. ALVINO- G. TROMBETTI, *Sulle migliori costanti di maggiorazione per una classe di equazioni ellittiche degeneri*, Ricerche di Matematica, **27**, 1978, pp. 414-428.

- [6] C. BANDLE, *Isoperimetric inequalities and applications*, Monographs and Studies In Mathematics, 7. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass.-London, 1980.
- [7] M.F. BETTA, *Estimates for solutions of nonlinear degenerate elliptic equations*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **45**, 1997, pp.449-473.
- [8] M.F. BETTA - V. FERONE - A. MERCALDO, *Regularity for solutions of non inear elliptic equations*, Bull. Sci. Math., **118**, 1994, pp. 539-567.
- [9] V. FERONE - M.R. POSTERARO, *On a class of quasilinear elliptic equations with quadratic growth in the gradient*, Nonlinear Analysis T.M.A., **20**, 1993, pp.703-711.
- [10] V. FERONE - M.R. POSTERARO - J.M. RAKOTOSON, *L^∞ -estimates for nonlinear elliptic problems with p -growth in the gradient*, J. Ineq. Appl., **3**, 1999, pp.109-125.
- [11] B. KAWOHL, *Rearrangements and convexity of level sets in PDE*, Lecture Notes in Mathematics, **1150**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1985.
- [12] C. MADERNA- C. D. PAGANI- S. SALSA, *Quasilinear elliptic equations with quadratic groth in the gradient*, J. Diffential Equations, **97**, 1992, pp.54-70.
- [13] G. TALENTI, *Elliptic equations and rearrangements*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., (4), **3**, 1976 pp. 697-718.
- [14] G. TALENTI, *Nonlinear elliptic equations, rearrangements of functions and Orlicz spaces*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), **120**, 1979, pp. 159-184.
- [15] G. TROMBETTI, *Metodi di simmetrizzazione nelle equazioni alle derivate parziali*, Boll. U.M.I., (8), **3-B**, 2000, pp.601-634.

La scoria d'alto forno attivata con alcali: un legante competitivo con il cemento Portland ordinario

Nota di Riccardo Sersale

(Adunanza del 4 maggio 2001)

Riassunto.

Al lume delle risultanze della più recente bibliografia, si passano in rassegna le principali proprietà di comportamento tecnico del cemento di scoria d'alto forno attivata con alcali e del corrispondente calcestruzzo. Si sottolineano le caratteristiche positive di questo tipo di legante, si puntualizzano le questioni sulle quali non ancora si registra convergenza di opinioni, si segnalano i prodotti d'idratazione, individuati con maggiore sicurezza, cui attribuire i fenomeni di presa e di indurimento, insieme con gli argomenti da approfondire e gli impieghi più appropriati del legante.

Summary.

The technical properties of alkali-activated blastfurnace cement and concrete are reviewed. The advantageous characteristics of such a binder are emphasized, defining the questions still requiring further debate and investigation. Hydration products, responsible for setting and hardening, detected with more certainty, are reported, too, together with the advisable application of the binder.

Parole chiave: Attivazione alcalina, scoria d'alto forno, cemento.

Key words : Alkali-activation, blastfurnace slag, cement.

Cemento e calcestruzzo preparati con scoria d'alto forno granulata attivata con alcali, come unico legante, furono ideati in Russia intorno al 1957 (1), anche se la possibilità di una tale attivazione ha costituito oggetto di studio sin dagli anni '40 (2). A partire dagli anni '70 sono poi aumentate significativamente le ricerche nel settore, sia in Europa che negli Stati Uniti, e sono anche iniziate le prime applicazioni.

Si tratta di un nuovo tipo di legante, ottenibile per attivazione della scoria d'alto forno granulata con un componente alcalino: NaOH, Na_2CO_3 , silicato sodico (vetro solubile) e loro possibili combinazioni, sodio fosfato, ecc., e costituisce un interessante campo di ricerca, poichè rende possibile l'impiego di prodotti di risulta provenienti da attività industriali, per realizzare un legante con prestazioni almeno simili, se non superiori, a quelle del cemento Portland, particolarmente: rapido indurimento, basso calore d'idratazione, alta resistenza meccanica alle brevi stagionature, eccellente durabilità (3) in ambienti aggressivi, resistenza al gelo. La sua produzione richiede inoltre minor energia rispetto al Portland e comporta una ridotta emissione di CO_2 .

Anche se è perfettamente possibile destinare a tale utilizzazione altre scorie metallurgiche, quella più correntemente usata è sempre la scoria d'alto forno, basica, granulata.

Fra gli attivatori alcalini, il silicato sodico (vetro solubile) in forma di soluzione riscuote il maggior favore (4), (5), per la resistenza chimica, la lavorabilità dell'impasto e le altre proprietà che consente di ottenere. A pari rapporto acqua/legante, paste e malte possono anche sviluppare resistenza a compressione superiore a quella delle paste e malte di cemento Portland ordinario. Il dosaggio più appropriato dell'attivatore alcalino si situa fra il 3.5 ed il 5.5% di Na_2O rispetto al peso di scoria.

La combinazione di attivatori alcalini differenti: silicato sodico e solfato o carbonato sodico, può rivelarsi appropriata (4) e rappresentare un compromesso fra proprietà di comportamento tecnico e costi. Ad esempio, il carbonato sviluppa resistenza meccanica più bassa alle brevi stagionature, rispetto al silicato sodico, ma origina anche ritiro minore.

Questa nota si propone di fare il punto sullo stato attuale delle conoscenze sulle proprietà di comportamento tecnico di tale tipo di legante, in vista delle applicazioni più appropriate.

Va in primo luogo sottolineato che sovente l'opinione dei ricercatori che affrontano questo argomento, rivela non poche discordanze. Ciò è dovuto, in parte, alle differenze di composizione della scoria impiegata, così come al complesso dei fattori che influenzano il comportamento del prodotto finito: superficie specifica della scoria, tipo e concentrazione dell'attivatore, rapporto molecolare $\text{SiO}_2/\text{Na}_2\text{O}$ nel caso d'impiego dell'attivatore più usato (silicato sodico), condizioni e durata della stagionatura ed altre variabili. Ciò nondimeno vale la pena di analizzare sistematicamente le caratteristiche principali di questo tipo di legante al lume della più recente bibliografia, ponendone in luce le proprietà positive, così come quelle meno vantaggiose ed i possibili interventi correttivi del comportamento.

RESISTENZA MECCANICA.

I principali fattori che influenzano la resistenza meccanica delle malte e dei calcestruzzi di scoria attivata, comprendono, come già sottolineato: superficie specifica della scoria, temperatura di stagionatura, natura e concentrazione dell'attivatore alcalino. La superficie specifica si situa fra 4000 e 5500 cm^2/g . La natura dell'attivatore sembra il fattore chiave (6). Seguono nell'ordine: la concentrazione dell'attivatore, la temperatura di stagionatura, la superficie specifica della scoria. I valori di resistenza meccanica possono però variare anche in funzione dei parametri citati.

L'anione attivatore giuoca un ruolo rilevante per influenza sulla natura, varietà, proporzione, cristallinità e struttura dei prodotti d'idratazione. La resistenza meccanica del cemento di scoria attivata con soluzione di silicato sodico, si sviluppa infatti sia per attivazione alcalina della scoria, dovuta all'anione silicato, sia per neoformazione di gelo di silice. Esso, più tardi, può reagire con il calcio per formare silicato di calcio idrato ricco di silice, avvalorando l'osservazione che i prodotti originati per azione del silicato alcalino denunciano più alta resistenza e ritiro per essiccamento maggiore.

E' opportuno sottolineare che lo sviluppo della resistenza meccanica del calcestruzzo di scoria attivata con alcali, si presta ad un rilevamento meno agevole rispetto al calcestruzzo di cemento Portland. Essendo la scoria il principale componente e l'alcali il promotore della sua idraulicità, lo sviluppo della resistenza è influenzato sia dalla prima, che dal secondo, sicchè l'interazione dei vari fattori è ben più sentita che nel caso del Portland. Inoltre, il miglior attivatore risulta funzione della composizione della scoria.

E' stato sostenuto (4) che la soluzione di silicato sodico con modulo 0.75 - 1.5 (rapporto molecolare $\text{SiO}_2/\text{Na}_2\text{O}$), dia sempre la resistenza più alta, indipendentemente dalle condizioni di stagionatura, dal tipo e finezza della scoria, anche se la composizione chimica di quest'ultima può influenzare il valore ottimale del modulo della soluzione di silicato sodico.

Esiste, in generale, come già sottolineato, un dosaggio ottimale di componenti alcalini ai fini del migliore sviluppo della resistenza meccanica: 3.5 - 5.5 % di Na_2O rispetto al peso di scoria. Per dosaggi più alti, la resistenza non aumenta, mentre dosaggi più bassi ne provocano un decremento.

Con riferimento ai costi di produzione, va osservato che quello del calcestruzzo di scoria attivata risulta, di norma, maggiore, probabilmente per il costo degli alcali, di quello del calcestruzzo di cemento Portland di pari classe, quando la resistenza è minore di 50 MPa. Se però si richiede una resistenza meccanica più alta, la maggiore facilità di produzione del calcestruzzo di scoria ad alta resistenza, lo rende più economico di quello del cemento Portland di pari classe.

Il calcestruzzo preparato con scoria attivata con silicato sodico in soluzione può infatti anche raggiungere una resistenza a compressione dell'ordine di 150 MPa senza additivi chimici (2), con una progressione nel tempo più rapida di quella del cemento Portland.

La resistenza ad un giorno è superiore a quella del cemento Portland ordinario.

La resistenza del calcestruzzo di scoria attivata con alcali, secondo altri (7) cresce al crescere della finezza della scoria, a spese di una ridotta lavorabilità e con possibile pericolo di falsa presa. Dipende inoltre dal modulo della soluzione e dalla concentrazione dell'alcali.

Il trattamento termico accelera considerevolmente lo sviluppo della resistenza meccanica del calcestruzzo di scoria attivata, ma, alle lunghe stagionature, essa si riduce rispetto al medesimo calcestruzzo stagionato a temperatura ambiente (8).

La stagionatura a temperatura riduce considerevolmente il ritiro del calcestruzzo di scoria attivata e lo rende paragonabile a quello del calcestruzzo di cemento Portland ordinario. Inoltre, due ore di pretrattamento a temperatura ambiente, prima di quello a temperatura elevata, riducono considerevolmente il ritiro del calcestruzzo di scoria attivata.

Gli aeranti (alchil-aril solfonati) e gli additivi che riducono il ritiro da essiccamento, si sono rivelati efficienti nel ridurre il ritiro del calcestruzzo di scoria attivata. Poichè gli aeranti migliorano anche la lavorabilità, si può ritenere (5) che essi siano i più adatti per il calcestruzzo di scoria attivata.

La resistenza a compressione del calcestruzzo di scoria attivata, può esser incrementata con l'impiego di prodotti ultrafini: fumo di silice o alternativi, quali: la stessa scoria granulata o le ceneri volanti ultrafini ($800 - 1500 \text{ m}^2/\text{kg}$) con riflessi sulla lavorabilità (7). La sostituzione parziale di scoria d'alto forno granulata con la medesima scoria ultrafine, a livello di rimpiazzo del 5%, denuncia una minima perdita di lavorabilità, rispetto al calcestruzzo di scoria d'alto forno attivata e resistenza meccanica significativamente maggiore a stagionature superiori ad un giorno. E' da tener presente che aggregati destinati alla produzione di un calcestruzzo di scoria attivata, possono, di norma, recare anche limitate quantità di impurità dannose per il cemento Portland, quali: limo ed argilla.

Ciò grazie alla presenza di componenti alcalini che, favorendo dispersione, dissoluzione e reazione con l'argilla, creano specie cementanti.

LAVORABILITA'

Il calcestruzzo di scoria d'alto forno granulata, attivata con alcali mostra migliore lavorabilità rispetto a quello di cemento Portland ordinario, con minima perdita di consistenza dopo 2 ore (abbassamento al cono di Abrams).

Lavorabilità e resistenza meccanica risentono del dosaggio dell'attivatore, del rapporto $\text{SiO}_2/\text{Na}_2\text{O}$, se quest'ultimo è il silicato sodico, della composizione e finezza della scoria (9).

Talvolta l'alta resistenza ad un giorno è accompagnata da rapida perdita di lavorabilità dopo 45 minuti. La resistenza ad un giorno del calcestruzzo di scoria attivata è simile a quella del calcestruzzo di cemento Portland ordinario, mentre il primo sviluppa resistenza maggiore a tempi più lunghi.

La quantità di acqua necessaria a fornire paste di cemento di scoria attivata a consistenza standard è un pò inferiore a quella necessaria per il cemento Portland ordinario, grazie all'azione attivante promossa dall'alcali sulla superficie della scoria. L'impasto può pertanto fornire un calcestruzzo ad alta resistenza con buona lavorabilità ed un abbassamento fino a 25 cm (consistenza fluida), senza aggiunta di riduttori d'acqua.

CALORE D'IDRATAZIONE.

Il calore d'idratazione del cemento di scoria d'alto forno attivata è notevolmente inferiore a quello del cemento Portland ordinario e risulta inferiore anche a quello del cemento Portland a basso calore d'idratazione, impiegato per costruire dighe. Ciò viene attribuito al complesso dei prodotti d'idratazione che si neoformano nelle paste di cemento di scoria attivata, grazie al loro più basso rapporto Ca/Si e, conseguentemente, alla più bassa energia d'idratazione.

RESISTENZA CHIMICA.

Ricerche molto compiute sono state condotte in argomento.

Sono state effettuate esperienze impiegando come agenti aggressivi soluzioni di: solfato di magnesio, acido cloridrico, acido solforico, cloruro e solfato di sodio, acido nitrico, acido acetico, acqua di mare. In generale, si è osservato buon comportamento.

In acqua di mare ed in soluzione 5-10% NaCl e/o Na_2SO_4 , è risultato che il cemento di scoria attivata con alcali si comporta assai meglio del Portland ordinario ed anche meglio del cemento Portland addizionato di fumo di silice a livello di rimpiazzo del 10% (2).

In soluzione di acido nitrico (pH3) ed acido acetico (pH3 e pH5), i risultati sperimentali convergono nell'indicare (10) che le paste di cemento Portland si corrodono più rapidamente di quelle di cemento di scoria attivata. Si avanza anche opinione che la resistenza alla corrosione acida delle paste di cemento indurite, più che dalla permeabilità e porosità, dipenda dalla natura dei prodotti d'idratazione e dallo strato protettivo, costituito principalmente da un gelo $\text{SiO}_2 \cdot n\text{H}_2\text{O}$, che crea una barriera contro il prosieguo della corrosione.

Con riferimento alla protezione dell'armatura annegata nel calcestruzzo, è noto che essa dipende dall'impermeabilità della matrice e dall'alcalinità. Poiché malte e calcestruzzi di scoria attivata risultano, di norma, molto compatti (11), grazie al principale prodotto d'idratazione: il C-S-H, la penetrazione di agenti aggressivi si presenta difficile, la loro velocità di diffusione rivelandosi inferiore a quella per i conglomerati in Portland.

La buona impermeabilità della pasta di cemento di scoria attivata, indurita, risulta ragionevolmente favorita dalla migliore struttura, recante più pori gelatinosi e meno pori capillari rispetto alla pasta di cemento Portland.

Esperienze condotte mediante cicli ripetuti di immersione in acqua di mare artificiale e successiva essiccazione, di barre d'acciaio annegate nel calcestruzzo di scoria attivata (12) hanno denunciato una perdita di peso inferiore a quella del calcestruzzo di cemento Portland ordinario ed in netta correlazione con la resistenza meccanica.

COMPORTAMENTO ALLA CARBONATAZIONE.

Non è stato ancora completamente definito.

Alcune ricerche riportano un buon comportamento (6), mentre altre suggeriscono di tenere nel debito conto alcuni fattori che possono influenzarlo: la richiesta d'acqua minore per il cemento di scoria attivata, rispetto al Portland ordinario, il rapporto acqua/legante, l'eventuale impiego di additivi fluidificanti.

E' stato proposto di prendere in considerazione due distinti rivelatori: il coefficiente di carbonatazione (rapporto fra resistenza meccanica prima e dopo carbonatazione) e velocità di carbonatazione.

Se il rapporto acqua/legante vien mantenuto costante, la carbonatazione può risultare più veloce nel calcestruzzo di scoria attivata con alcali addizionato di fluidificanti, rispetto al calcestruzzo di controllo in Portland ordinario. Se la fluidità vien mantenuta costante, la velocità di carbonatazione è uguale nei due calcestruzzi (13). Viene inoltre segnalata una correlazione fra resistenza meccanica del calcestruzzo di scoria attivata e comportamento alla carbonatazione. Calcestruzzi con resistenza superiore a 50 MPa si comportano assai meglio sia rispetto al coefficiente, che alla velocità di carbonatazione, di quanto non si verifichi per quelli con resistenza pari a 30 MPa (2).

RESISTENZA AL GELO.-DISGELO ED A TEMPERATURA.

Le strutture in cemento di scoria attivata con alcali si comportano bene, tanto alle basse, quanto alle alte temperature, sicché tale legante può esser impiegato nella produzione di calcestruzzi resistenti al calore, così come al freddo.

Una ragionevole spiegazione della buona resistenza al freddo può esser ricercata nella bassa richiesta d'acqua ed in una microstruttura con prevalenza di pori gelatinosi, contenenti alcali in forma di vera e propria soluzione concentrata, con temperatura di congelamento considerevolmente inferiore a quella dell'acqua (14).

Con riferimento alla resistenza al calore, risulta che, scegliendo convenientemente l'aggregato, il calcestruzzo di scoria attivata mantiene le sue prestazioni strutturali a temperatura compresa fra 500 e 700 °C, laddove quello di cemento Portland ordinario, di norma, le perde già verso i 500°C.

L'alternarsi di un clima freddo ed umido, con uno caldo e secco, favorisce la formazione di efflorescenze sulle strutture in calcestruzzo di scoria attivata, efflorescenze presumibilmente originate dalla lisciviazione dell'alcali libero, operata dall'evaporazione dell'acqua. Sono infatti stati riscontrati depositi di carbonato ed anche di solfato alcalino, che, oltre a pregiudicare l'aspetto estetico, possono ridurre impermeabilità e durabilità del manufatto.

La nascita di efflorescenze dipende anche dal tipo di attivatore alcalino impiegato e dalle condizioni di stagionatura. Una stagionatura accelerata, in condizioni d'umidità relativa superiore al 95%, sembra un rimedio efficace ai fini della riduzione delle efflorescenze.

TEMPO DI PRESA.

Svantaggio del cemento di scoria attivata è sicuramente l'inizio di presa più rapido rispetto al cemento Portland ordinario. Tale rapidità lascerebbe supporre un processo di dissoluzione e successiva precipitazione (15), nei primi stadi del processo d'idratazione, sotto l'energica azione dell'idrossido alcalino sulla scoria.

L'assenza del silicato tricalcico e dell'alluminato tricalcico nella scoria, rende poi differente il meccanismo di presa rispetto al cemento Portland e non ancora del tutto conosciuto.

Specie quando, al fine di raggiungere resistenza meccanica più alta, si impiegano soluzioni più concentrate di attivatore alcalino, la presa può iniziare in tempi brevissimi, dell'ordine di 15 minuti. Ciò induce a ritenere che essa sia ragionevolmente addebitabile alla formazione simultanea di C-S-H e di un gelo ricco di silice.

Si rende pertanto necessario l'impiego di additivi chimici ritardanti, che non abbiano, però, effetti negativi sullo sviluppo della resistenza meccanica. Di tali additivi ne sono stati studiati un gran numero, sulla scia di quelli idonei per il cemento Portland.

Alcuni additivi, come borato e fosfato di sodio si sono rivelati adatti ritardanti della presa di cementi di scoria a media resistenza e meno efficaci per quelli a più alta resistenza. Il grassello, aggiunto alla soluzione di silicato sodico in proporzione del 2-5% di Ca(OH)_2 per peso di scoria, ha mostrato di ritardare la presa, ma di esercitare effetti negativi sul comportamento meccanico. Assai meglio i sali di bario, se anche più costosi.

Benché una presa rapida risulti talvolta desiderabile, pur tuttavia la messa a punto di una metodologia idonea a ritardare quella, rapida, dei leganti di scoria, appare tuttora argomento del massimo interesse, poiché consentirebbe di ampliare gli impieghi di tali leganti, con favorevoli ricadute sui costi di produzione dei manufatti.

RITIRO DA ESSICCAMENTO.

E' stato osservato un ritiro maggiore di quello del calcestruzzo di cemento Portland ordinario, specie quando l'attivatore alcalino è costituito da soluzione di silicato sodico, a seguito della formazione, nel corso dell'idratazione, di gelo di silice o di gelo ricco di silice ad alto contenuto d'acqua (16).

La riduzione della finezza della scoria, del rapporto soluzione attivante/ scoria, del modulo del silicato sodico, così come l'incremento del rapporto aggregato/scoria, costituiscono accorgimenti atti ad una riduzione del ritiro. Allo stesso modo si comporta la stagionatura accelerata, promuovendo la trasformazione del gelo di silice in silicato di calcio idrato.

Il ritiro da essiccamento può produrre fessurazione del calcestruzzo di scoria, a seguito della liberazione dell'alto contenuto d'acqua. Tale calcestruzzo ha un più basso modulo elastico, un più alto scorrimento viscoso ed una più alta resistenza a trazione, di quelli del cemento Portland. Gli effetti combinati di tali fattori possono influenzare la tendenza alla fessurazione. Un'appropriata stagionatura, la scelta del tipo d'aggregato, l'aggiunta di aggiunte chimiche riduttrici del ritiro, possono correggere (17) tale tendenza.

E' stato osservato (18) che il calcestruzzo di cemento Portland, nel corso del ritiro, perde una quantità di acqua maggiore di quella del calcestruzzo di scoria. Ciò è in netto contrasto con la convinzione generale dell'esistenza di una relazione diretta fra la perdita di umidità e l'entità del ritiro. La microstruttura più aperta del calcestruzzo di scoria attivata, la circostanza che la pasta di cemento reca un'aliquota, assai maggiore di quella del cemento Portland ordinario, di pori ripieni d'acqua, di dimensioni che cadono nella regione dei mesopori, potrebbe giustificare tale comportamento. Ciò porterebbe, però, ad attribuire alle dimensioni e morfologia dei pori un ruolo determinante sull'entità del ritiro e chiarirebbe il perchè di quello, maggiore, delle paste di cemento di scoria.

ALCALI REAZIONE.

L'eventualità di una reazione alcali-aggregato, considerato l'alto tenore di Na_2O del cemento di scoria (3% o più), non può esser del tutto esclusa, anche se vien riportato (19) che essa non è stata osservata perchè l'80% degli alcali del cemento di scoria si combinerebbe, nel corso di un anno, con i prodotti d'idratazione. La quantità di alcali incorporabile in tali prodotti, non è stata, però, esattamente definita. In attesa della determinazione (3), conviene effettuare tuttora un'attenta scelta dell'aggregato, in relazione al tenore di silice reattiva.

IDRATAZIONE E SVILUPPO DELLA MICROSTRUTTURA.

La reazione inizia con l'attacco della silice, o del reticolo allumo silicatico della scoria, da parte degli ioni OH^- (15).

Il meccanismo predominante che governa le reazioni iniziali sembra riconducibile ad una dissoluzione-precipitazione (20). Nel corso dell'idratazione, i prodotti neoformati si dispongono ad occupare la massima parte degli spazi inizialmente a disposizione della fase liquida. Sono stati individuati pure prodotti d'idratazione neoformati al contorno dei granelli di scoria, ciò che lascia supporre anche un meccanismo d'idratazione "in situ", negli stadi più avanzati del processo.

In tutte le paste di cemento di scoria attivata, il principale prodotto d'idratazione si rivela costituito da C-S-H gelo (20), (21).

E' stata anche riconosciuta, in scala submicroscopica, una fase di tipo idrotalcite (idrossido-carbonato idrato di Mg ed Al) con rapporto Mg/Al intorno a 2. A tempi brevi, quando il rapporto Ca/Si della scoria è relativamente alto, può formarsi idrossido di calcio, a spese del quale si originano poi fasi di tipo AFm. Già dopo un giorno, il gelo di silice può inglobare, come soluzione solida, un apprezzabile quantitativo d'alluminio, con un rapporto Al/Si di circa 0.18.

La maggior parte del sodio sembra presente nella soluzione dei pori o inglobata nel gelo di C-S-H (22) a basso rapporto Ca/Si.

La possibile formazione di fasi di tipo zeolitico, come di altre fasi cristalline contenenti sodio, appare improbabile, poichè richiederebbe un alto rapporto Ca/Si. Nelle tipiche scorie d'alto forno, invece, il tenore di CaO è spesso sufficiente per consumare l'intero quantitativo di silice nella neoformazione di C-S-H gelo.

IMPIEGHI DEL CEMENTO DI SCORIA ATTIVATA CON ALCALI.

Dall'esame della vasta bibliografia risalta che le proprietà del cemento di scoria attivata con alcali, sulle quali si registra maggior convergenza di opinioni, sono: alta resistenza alle brevi stagionature, rapido indurimento, alta resistenza meccanica finale, bassa permeabilità, basso calore d'idratazione, bassa velocità di corrosione del tondino d'acciaio annegato nel calcestruzzo, buona resistenza alla diffusione dei cloruri e ad attacchi chimici in genere (22), nonché al gelo-disgelo, a parte le favorevoli prospettive del profilo ecologico della produzione e dei relativi costi.

Le applicazioni più appropriate sembrano pertanto: manufatti prefabbricati, opere resistenti a temperatura, realizzazioni dell'ingegneria chimica e di altri settori delle costruzioni, strutture soggette a marea, costruzioni a largo delle coste, pozzi petroliferi, operazioni di trivellazione (23), immobilizzazione di rifiuti tossici e radioattivi.

Fra le questioni meritevoli di ulteriore approfondimento rimangono tuttora: il meccanismo di presa ed indurimento, l'ottimizzazione del tempo di presa, il quantitativo di alcali incorporabile nei prodotti d'idratazione, la suscettibilità all'alcali reazione, la natura dei prodotti d'idratazione, il ruolo dei cationi alcalini nell'idratazione.

BIBLIOGRAFIA

- (1) Glukhovskiy V.D. Soil silicates. Gosstroizdat, Kiev (1954).
- (2) Wang S.D., Pu X.C., Scrivener K.L., Pratt P.L. Alkali-activated slag cement and concrete: a review of properties and problems. *Advances Cement Res.*, 7, 27, 93-102 (1995).
- (3) Roy D.M. Alkali-activated cements. Opportunities and challenges. *Cement Concrete Res.*, 29, 2, 249-254 (1999).
- (4) Wang S.D., Scrivener K.L., Pratt P.L. Factors affecting the strength of alkali-activated slag. *Cement Concrete Res.*, 24, 6, 1033-1043 (1994).
- (5) Bakharev T., Sanjayan J.G., Cheng Y.B. Effect of admixtures on properties of alkali-activated slag concrete. *Cement Concrete Res.*, 30, 9, 1367-1374 (2000).
- (6) Fernandez-Jimenez A., Palomo J.G., Puertas F. Alkali-activated slag mortars. Mechanical strength behaviour. *Cement Concrete Res.*, 29, 8, 1313-1321 (1999).
- (7) Collins F.G., Sanjayan J.G. Effects of ultrafine materials on workability and strength of concrete containing alkali-activated slag as the binder. *Cement Concrete Res.*, 29, 3, 459-462 (1999).
- (8) Bakharev T., Sanjayan J.G., Cheng Y.B. Effect of elevated temperature curing on properties of alkali-activated slag concrete. *Cement Concrete Res.*, 29, 10, 1619-1625 (1999).
- (9) Collins F.G., Sanjayan J.G. Workability and mechanical properties of alkali-activated slag concrete. *Cement Concrete Res.*, 29, 3, 455-458 (1999).
- (10) Shi C., Stegemann J.A. Acid corrosion resistance of different cementing materials. *Cement Concrete Res.*, 30, 5, 803-808 (2000).
- (11) Krivenko P.V. Alkaline cements. *Proc. 1st. Int. Conf. alkali Cement and Concrete*, 1, 11-129. Kiev (1994).
- (12) Pu X.C. Study on durability of alkali-slag concrete. *Proc. Int. Symp. Concr. Engng.* 2, 1144-1149. Nanjing (1991).
- (13) Byfores K. Durability of concrete made with alkali-activated slag. *Proc. 3th Int. Conf. Fly Ash, Silica fume, Slag and Natural Pozzolans in Concrete*, 2, SP 114-70, 1429-1466. Trondheim (1989).
- (14) Glukhovskiy V.D., Rostovskaja G.S., Rumyna G.V. High strength slag alkaline cement. *Proc. 7th Int. Congress Chemistry Cement*, 3, V-164-V-168. Paris (1980).
- (15) Jiang W., Silsbee M.R., Roy D.M. Alkali-activation reaction mechanism and its influences on microstructure of slag cement. *Proc. 10th Int. Congress Chemistry Cement*, 3, 3ii 100. Gotheborg (1997).

- (16) Shi C., Day R.L., Wu X., Tang M. Comparison of the microstructure and performance of alkali-slag and Portland cement pastes. Proc. 9th Int. Congress Chemistry Cement, III, 298-304. New Delhi (1992).
- (17) Collins F., Sanjayan J.G. Cracking tendency of alkali-activated slag concrete subjected to restrained shrinkage. Cement Concrete Res., 30, 5, 791-798 (2000).
- (18) Collins F., Sanjayan J.G. Effect of pore size distribution on drying shrinkage of alkali-activated slag concrete. Cement Concrete Res., 30, 9, 1401-1406 (2000).
- (19) Krivenko P.V. Alkaline cements. Proc. 9th Int. Congress Chemistry Cement, 4, 482-488 New Delhi (1992).
- (20) Wang S.D. Alkali-activated slag: hydration process and development of microstructure. Advances Cement Res., 1, 4, 163-172 (2000).
- (21) Kutti T. Hydration products of alkali-activated slag. Proc. 9th Int. Congress Chemistry Cement, IV, 468-474. New Delhi (1992).
- (22) Roy D.M., Jiang W., Silsbee M.R. Chloride diffusion in ordinary, blended and alkali-activated cement pastes and its relation to other properties. Cement Concrete Res., 30, 12, 1879-1884 (2000).
- (23) Brylicki W., Malolepszy J., Stryczek S. Alkali-activated slag cementitious material for drilling operation. Proc. 9th Int. Congress Chemistry Cement, III, 312-318. New Delhi (1992).

Numerical Simulation of Double Diffusive Convection in a Four - component Isothermal Diffusion Boundary

Nota di Pier Luigi Vitagliano, Maria Castaldi e Vincenzo Vitagliano

Presentata dal Socio Vincenzo Vitaliano
(Adunanza del 4 maggio 2001)

Riassunto. E' stato sviluppato un programma di calcolo per l'analisi tridimensionale della diffusione e convezione in un sistema con quattro componenti. I risultati numerici mostrano lo svilupparsi di moti convettivi dovuti a instabilità gravitazionali, in accordo con la teoria.

La simulazione numerica può essere utile nel valutare il flusso totale di massa e quello dei singoli componenti in sistemi dove sono presenti, contemporaneamente, diffusione e convezione.

E' stata messa in evidenza la crescita di strutture dissipative più complesse di quelle presenti in un sistema con tre componenti, strutture che mostrano la presenza contemporanea di strati liquidi con flussi stabili ed instabili.

Nella nota è anche mostrato un confronto qualitativo tra la simulazione numerica ed una misura sperimentale.

Abstract. A computer code for the unsteady 3-dimensional analysis of convection and diffusion in four-component systems has been developed. Numerical results show the evolution of convective motion, due to gravitational instabilities, in agreement with theory.

Numerical simulation can be helpful in evaluating the total amount of mass flow for each component in systems where convection and diffusion are both present.

The growth of dissipative structures more complex than those found in three component systems was put in evidence showing the presence of alternate layers of stable and unstable flow.

In the paper we also present a qualitative comparison of the simulation results with an experimental test.

Keywords: Diffusion, Double diffusive convection, Numerical simulation, Four component systems

Introduction

The appearance of convection in a diffusion layer is called double diffusive convection, DDC¹. It is a phenomenon of great interest in various branches of science, which include meteorology, astrophysics, geology, crystallisation from melts, oceanography. In this last field much research has been done during the last thirty years. DDC in oceans is in fact connected with the problem of transport of energy and mass through sea waters².

DDC was also put in evidence in diffusion cells where it can be monitored in accurate conditions of temperature and composition so that these experiments may turn out useful for verifying the fluid dynamic theory³⁻⁷.

Recently some of us applied successfully the numerical simulation to describe the evolution of convection in a three component isothermal diffusion boundary and the results were compared with experimental tests⁸.

Free diffusion boundaries in isothermal three-component systems may develop gravitational instabilities that promote the growth of convection. If the instability appears at the borders of the boundary, large convection cells promote an apparent stabilisation of the boundary (*called overstability*)⁹. If the gravitational instability appears at the centre of the boundary, convection develops a set of *fingers* that destroy the boundary in a rather short time. These convective motions correspond to those studied by the oceanographers in sea water where large stratifications and fingers areas have been found connected with temperature and salinity gradients^{2, 10, 11}. Diffusion in a n-component solution is described by the extended Fick's equations that require (n-1)² coefficients, D_{ij} :

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n-1} D_{ij} \nabla^2 C_j \quad (i, j = 1, \text{ to } n-1) \quad (1)$$

where t is the time, C_j the concentration of component j (the n -th component is the solvent).

In general, the cross terms D_{ij} ($i \neq j$) cannot be neglected; in fact they may be found large and even larger than the main terms^{5,12,13}.

If the D_{ij} are constant, Eqs.(1) can be solved leading to the sum of $n-1$ error functions for any properties linearly related to the components concentration (density, refractive index, total concentration, concentration of each single component,...).

The following equation relates the density, ρ , of the solution to its composition:

$$\rho = \rho_0 + \sum_i H_i (C_i - C_i^0) \quad (2)$$

where ρ_0 and C_i^0 are the density of the solution and the concentrations of its components at an average composition, and $H_i = (\partial \rho / \partial C_i)$ are assumed to be constant.

Two conditions are required for the gravitational stability of a diffusion boundary in a multicomponent system:¹²

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_t \leq 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{z} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right)_t \geq 0 \quad (4)$$

where ρ is the density of the solution and z the coordinate in the diffusion direction, assumed along the negative direction of the gravity vector, g .

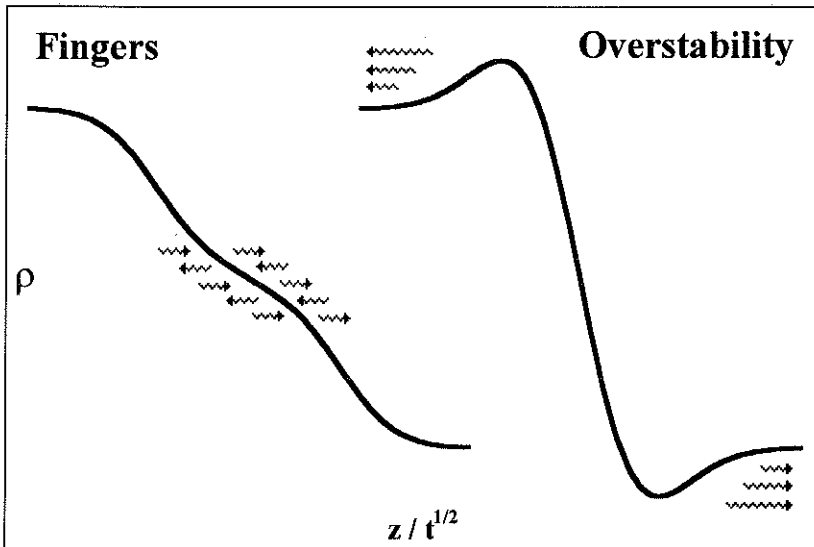


Figure 1.

Density evolution due to diffusion leading to gravitationally unstable boundaries. It is shown where and how convection develops.

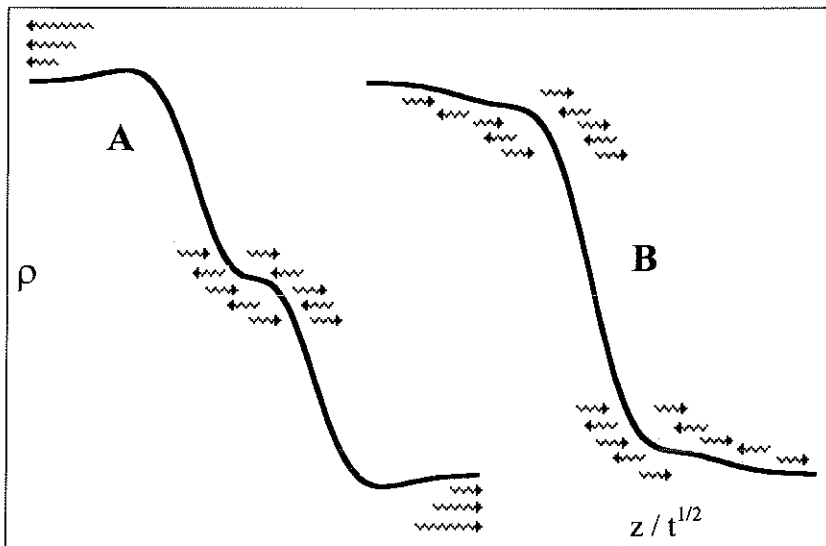


Figure 2

Possible density evolutions due to diffusion in a four-component system. It is shown where and how convection develops.

The first condition, called *static condition*, simply requires that no density inversions must appear inside the diffusion boundary; it is the only condition required in two component systems.

The second condition is called *dynamic condition*. In three component systems this condition, usually, fails at the centre of the diffusion boundary, promoting the growth of fingers, even in the absence of density inversions. On the other hand, the failure of condition (3) at the borders of the boundary promotes convective motions of overstability type. Figure 1 shows the density evolutions in a three-component system, due to diffusion, that lead to overstability and fingers conditions.

In a four component system, due to the presence of three error functions in the solution of Eq.(1), more complex density distributions may grow, during the isothermal diffusion, so that more sophisticated structures can be expected due to the onset of convection. Two possible density distributions that should promote the evolution of convection, not found in a three component system, are shown in Figure 2.

Let us remember here that alternating layers of fingers and water at constant composition have been found in the ocean going down to a several hundred meters deepness. Actually, sea water is not a two component system since the appreciable presence of various salts makes it a multicomponent system.

It is interesting to note that complex dissipative structures can be predicted when DDC develops in multicomponent diffusion layers.

When convection starts, matter transport increases. Numerical simulation can be helpful to predict the total amount of mass flow for each component, since no analytical solution of the transport equations in a multi-component system is known, even for the simplest cases.

In this paper we present the results of a numerical simulation procedure to compute the evolution of convection in a four-component diffusion boundary. A qualitative comparison of the simulation results with an experimental test has also been done.

Governing equations.

Numerical simulation assumes the usual approximations used in experimental differential diffusion measurements: (i) constant diffusion coefficients and (ii) linear relation between concentrations and density (Eq.2).

The following transport equations of total mass, momentum, and three component concentrations describe the physics of quaternary systems in a 3-dimensional domain Ω :

$$\text{div } \mathbf{V} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} - \nabla(P/\rho_0) + \nu \cdot \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{g} \rho / \rho_0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\mathbf{V} \cdot \nabla C_i + \sum D_{ij} \cdot \nabla^2 C_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (7-9)$$

Density is related to concentrations by the state equation (2):

$$\rho = \rho_0 + \sum H_j (C_j - C_j^0) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2, 10)$$

Eq.(6) is also called unsteady incompressible Navier-Stokes equation. The unknowns of this system are the components of the velocity $\mathbf{V}$, the density ρ , the pressure P , and the concentrations C_i . They are computed in the domain $\Omega \times [0, T]$, where Ω is a three-

dimensional spatial domain, and $[0, T]$ a time interval. It can be noted that if $\mathbf{V} = 0$ our system reduces to Eqs.(1) and (2).

Initial conditions at time $t = 0$ and conditions at the boundaries $\partial\Omega$ are required for $\mathbf{V}$ and C_i in order to solve this system of partial differential equations.

In our tests, initial conditions at time $t = 0$ are: $\mathbf{V} = 0$ and step functions for C_i along the direction of the gravity vector $\mathbf{g}$. The step functions subdivide the computational domain in an upper solution, where initial concentrations are C_i^{Top} and a lower solution, where initial concentrations are C_i^{Low} . The horizontal boundary between the upper and lower solution is called boundary layer.

Boundary condition at $\partial\Omega$, for $t \in [0, T]$ are: $\mathbf{V} = 0$ (no-slip boundary conditions), and $\nabla C_i \cdot \mathbf{n} = 0$. Zero-gradient condition for the component of velocity parallel to the boundaries could also be assigned (free-slip boundary conditions), instead of $\mathbf{V} = 0$.

The stability analysis of the linearized governing equations shows that, starting from initial conditions with $\mathbf{V} = 0$ in a gravity field, convective motions can develop in a subset of the domain $\Omega \times [0, T]$. These motions depend on the initial values of the concentrations C_i in the upper and lower solutions, on density gradients H_i , and on diffusion coefficients D_{ij} , (see Eqs. 3 and 4).¹²

Some details concerning the solution technique adopted in our computer code are given in the Appendix¹⁴.

Source of data and tests conditions

The diffusion data on the four component system Ethanol [$C_1^0 = 0.00101 \text{ mol cm}^{-3}$] - Tartaric acid [$C_2^0 = 0.0011 \text{ mol cm}^{-3}$]-Glucose [$C_3^0 = 0.0011 \text{ mol cm}^{-3}$]-Water at 25°C are data from our Laboratory obtained using the experimental Gouy interferometric technique, largely discussed in the literature^{15,16}. This system is still under investigation, however, the data so far obtained are sufficiently reliable and describe reasonably well the experimental diffusional transport on this system. They have been obtained using 21 experimental runs taken with different ΔC_i values at the same average concentrations C_i^0 (ΔC_i being defined as the difference $C_i^{\text{Low}} - C_i^{\text{Top}}$).

This was the reason for using such data on the numerical simulation. We may note that the choice of the four component system for testing the numerical simulation is not critical. In fact any four-component system has ranges of concentration gradients that promote diffusion density profiles gravitationally stable or unstable. We may point out, for instance, that all boundaries having bottom and top solutions at almost the same density are always unstable.

The data used in our simulations are collected in Table 1.

Table 1

Diffusion data for the system Ethanol(1) - Tartaric acid(2) -Glucose(3) -Water at 25°C

 $C_1^0 = 1.010 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$, $C_2^0 = 1.100 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$, $C_3^0 = 1.100 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$

$D_{ij} / \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$					
D_{11}	0.626×10^{-5}	D_{12}	-0.428×10^{-5}	D_{13}	-0.076×10^{-5}
D_{21}	-0.031×10^{-5}	D_{22}	0.444×10^{-5}	D_{23}	0.444×10^{-5}
D_{31}	0.045×10^{-5}	D_{32}	-0.001×10^{-5}	D_{33}	0.287×10^{-5}

$H_i / \text{g mol}^{-1} \text{ (Eq.2)}$					
$\rho_o \text{ (Eq.2)} / \text{g cm}^{-3}$	1.00069	H_1	-8.19	H_2	62.88
gravity g	-981 cm s^{-2}	H_3	65.6	Viscosity ν	0.0318 poises

$C_i / \text{mol cm}^{-3}$					
C_1^{Low}	C_2^{Low}	C_3^{Low}	C_1^{Top}	C_2^{Top}	C_3^{Top}
0.565×10^{-3}	1.100×10^{-3}	1.045×10^{-3}	1.455×10^{-3}	1.100×10^{-3}	1.155×10^{-3} (1)
1.445×10^{-3}	1.165×10^{-3}	1.000×10^{-3}	0.575×10^{-3}	1.035×10^{-3}	1.000×10^{-3} (2)
0.555×10^{-3}	1.080×10^{-3}	1.090×10^{-3}	1.465×10^{-3}	1.140×10^{-3}	1.110×10^{-3} (3)
1.4475×10^{-3}	1.1575×10^{-3}	1.100×10^{-3}	0.5725×10^{-3}	1.0425×10^{-3}	1.100×10^{-3} (4)

(1) set of C_i data corresponding to fingers conditions near to the isodensimetric line, (2) set of C_i data corresponding to overstability + fingers conditions, (3) set of C_i data corresponding to two fingers regions, see Fig. 3, (4) set of data corresponding to very unstable gravitationally conditions at the centre of the boundary, see Fig.8.

Fig.3 is a scheme of the normalised $\Delta C_i / (\Delta C_1 + \Delta C_2 + \Delta C_3)$ conditions in our quaternary system, showing the composition difference ranges between bottom and top solutions where stable or unstable boundaries are found. A line in this scheme represents the intersection of a specific plane in the space of $\Delta C_1, \Delta C_2, \Delta C_3$.

Isodensimetric condition is the following:

$$\Delta \rho = -0.00819 \Delta C_1 + 0.06288 \Delta C_2 + 0.06560 \Delta C_3 = 0 \quad (\text{Plane N}) \quad (11)$$

By crossing the N plane on this scheme, the composition differences ΔC_i must be reverted, in order to keep a stable boundary layer (i.e. $\rho^{\text{Low}} - \rho^{\text{Top}} > 0$).

The analitical solution of diffusion Eqs.(1) for our system leads to an equation for the density as function of ΔC_i and z^{12} , which meets the stability condition (4) at $z=0$ when

$$\Delta C_1 + 3.937 \Delta C_2 + 9.484 \Delta C_3 = 0 \quad (\text{Plane F}) \quad (12)$$

and meets the condition (3) for $z \rightarrow \infty$ when

$$\Delta C_1 + 1.891 \Delta C_2 + 0.3217 \Delta C_3 = 0 \quad (\text{Plane G}) \quad (13)$$

Eq.(12) represents the limiting conditions for the onset of fingers in the middle of the boundary layer, while Eq.(13) is the limiting condition for the onset of overstability. It means that we expect to find fingers in the middle of the boundary layer when ΔC_i are located in the areas between planes N and F, and overstability when they are located in the areas between planes N and G.

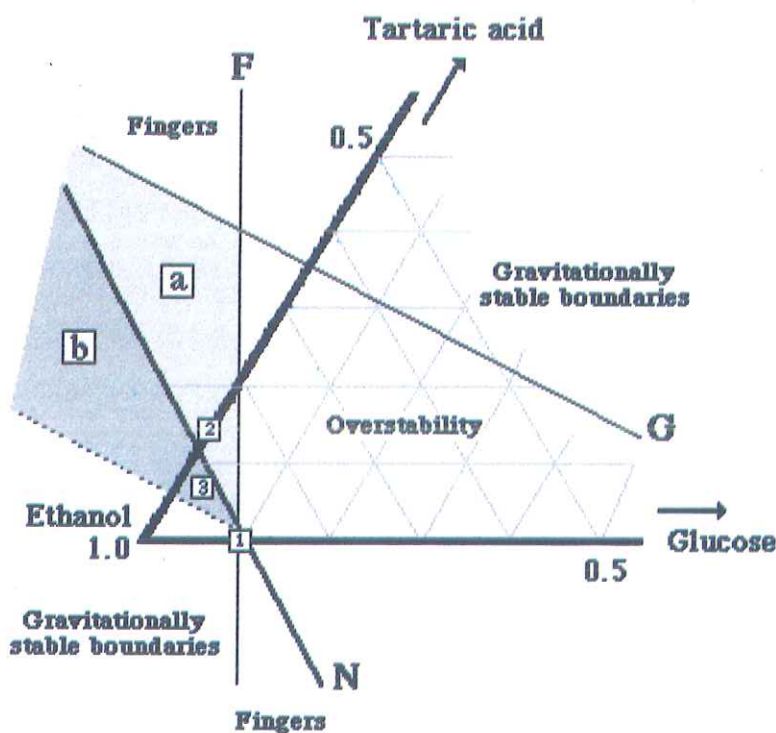


Figure 3

Quaternary system Ethanol(1)-Tartaric acid(2)-Glucose(3)-Water at 25°C. Ternary diagram to represent the composition differences between bottom and top solutions in diffusion runs. Each point in the diagram represents $\Delta C_i / (\Delta C_1 + \Delta C_2 + \Delta C_3)$. Line N corresponds to the isodensimetric composition (intersection of the plane given by Eq.11 with the ternary diagram), line F corresponds to the limit between stable boundaries and the appearance of fingers at the centre of the diffusion boundary (intersection of the plane given by Eq.12 with the ternary diagram), line G corresponds to the limit between the stable boundaries and the region of overstability (intersection of the plane given by Eq.(13) with the ternary diagram). [1], [2], and [3] composition differences where simulation was done (the composition of simulation 4 is very near to that of simulation 2). [a] composition differences field where both overstability and fingers appear (see Fig.2A). [b] composition differences field where two instability regions are present inside the diffusion boundary (see Fig.2B).

It is worth while to point out that plane G is independent of the H_i values, depending **only** on the nine D_{ij} , while plane F depends both on the H_i and D_{ij} values ^{4,12}.

The area **[a]** in Fig.3 is laying between the N plane and both the F and G planes; here we have the contemporary failure of conditions (3) and (4), Fig.2A.

The dashed line in fig.3 indicates the limiting condition (area **[b]**) for the onset of fingers in two regions of the diffusion boundary, i.e. when condition (4) is met for $z \neq 0$ (Fig.2B).

Experiment

An experimental test was performed using a container (*the diffusion cell*) of section 2.5×1.0 cm² and 8.0 cm height, by pouring-in top and bottom solutions contemporaneously at the two ends of the container and allowing their mixture to be siphoned out through a capillary put at the central level. A sharp boundary is generated at this level (see Fig. 4-1). By stopping the siphoning diffusion starts. Our experiment was performed using the conditions (1) given in Table 1. Top and bottom solutions have densities very near to the isodensimetric line so the system is gravitationally unstable. Instabilities appear at the centre of the boundary and fingers develop in a very short time.

Fig. 4 (2-4) shows the evolution of convection that is very effective after a few minutes.

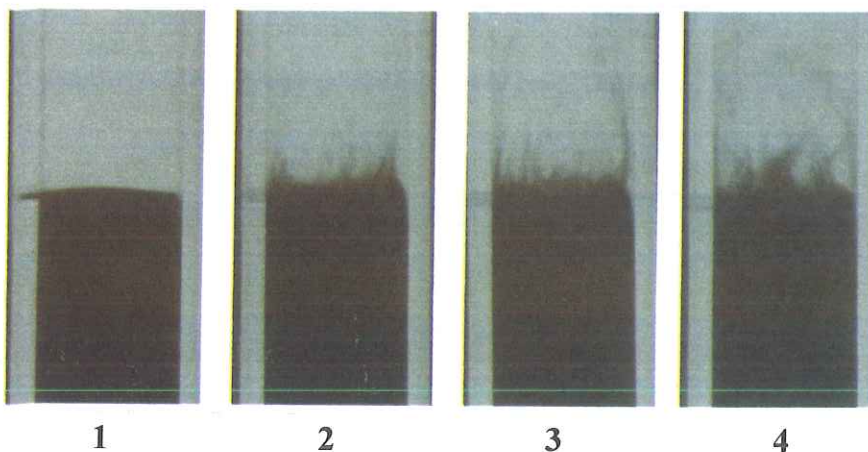


Figure 4.

Double diffusive convection experiment on the system Ethanol(1)-Tartaric acid(2)-Glucose(3)-Water: $\Delta C_1 = -0.89$, $\Delta C_2 = 0.00$, $\Delta C_3 = -0.11$ /mol dm⁻³ (point 1 of Fig.3). Fingers evolution in a system very near to the isodensimetric line. 1, syphoning. 2, 156 sec. 3, 212 sec. 4, 360 sec. Bottom solution has been coloured with a trace amount of methylene blue to put in evidence convective motions. In this test ΔC_i are negative to have the density of top solution lower than that of bottom solution.

Numerical simulations

Our numerical simulations have been made by subdividing the container into small cells (see Appendix). We have 64×32 cells in the horizontal section and 64 cells along the vertical direction. Cells in the vertical direction are clustered in the area of the boundary layer.

Four examples of numerical simulation are discussed in these pages:

(1) The first example corresponds to the experimental test shown in Fig. 4.

In this case, as an example to show different aspects of the evolution of convection, the figures show the component of vertical velocity in various sections of the container, as well as the density, and the concentration of components 1, 2, and 3.

For the following simulations, only the vertical component of velocity in the central section of the container will be shown, these figures are sufficient to appreciate how convection evolves in the various cases.

(2) The second simulation corresponds to a density evolution inside the boundary due to diffusion as shown in Fig. 2A, where gravitational instabilities appear both at the centre and at the borders of the boundary (see point 2 in Fig. 3).

(3) The third example corresponds to a density evolution inside the boundary due to diffusion as shown in Fig. 2B, where two regions of gravitational instability appear inside the boundary (see point 3 in Fig. 3).

(4) The fourth example corresponds to concentration differences through the diffusion boundary leading to highly gravitationally unstable layers at the centre of the boundary, while an overstability situation is present at the borders (see Fig. 8A).

Simulation (1)

The evolution of convection as a set of fingers developing from the centre of the diffusion boundary can be seen on the simulation graphs given in Figs. 5. Graph A shows the vertical component of convective velocity, V_z , on the central plane xz of the container ($y = 0.52$ cm). The evolution of a few fingers moving up and a few ones moving down is evident.

Graphs B show the contour plots where the V_z component of convective velocity is constant in various sections of the container (different colours correspond to different velocities, according to the colour bar).

Some characteristic aspects of these curves can be put in evidence. Sections xy drawn at different levels of the container show the presence of about 6–7 ascending fingers on the upper sections of the container and a corresponding number of descending fingers on the lower sections. These fingers are in agreement with those found experimentally and shown in Fig. 4. Another aspect to be pointed out can be seen in the picture of section xz at $y = 0.52$ cm: the descending finger starts from a higher level than that of the ascending one. This fact is in agreement with the presence, in this case, of a density inversion at the centre of the diffusion boundary.

The evolution of fingers is very quick, due to the high gravitational instability of a boundary layer between two solutions having almost the same density, however the simulation develops in a time somehow longer than that found experimentally. Probably, in the experimental case small perturbations present in the environment, not accounted for in the simulation program, may accelerate the evolution of convection.

Graphs C shows the contour lines of density plotted for three different xz planes inside the container.

Graphs D are similar graphs where the contour lines of concentration of components 1, 2, and 3 in the vertical section of the container at $y = 0.52$ cm have been shown. In both sets of graphs the evolution of fingers is clear. The graphs of Figs.5 correspond to $t = 400$ sec.

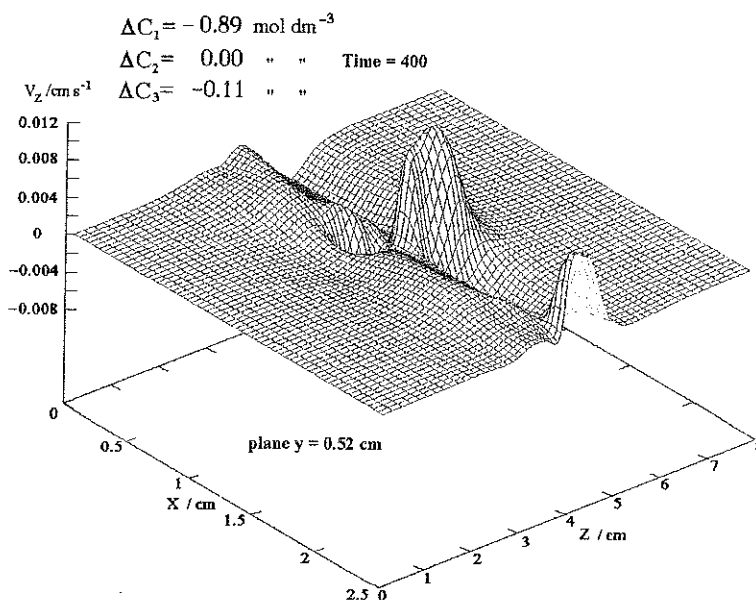


Figure 5 A

Simulation of DDC on the quaternary system Ethanol(1)-Tartaric acid(2)-Glucose(3)-Water: $\Delta C_1 = -0.89 \times 10^{-3}$, $\Delta C_2 = 0.00$, $\Delta C_3 = -0.11 \times 10^{-3} / \text{mol cm}^{-3}$ (Point 1 of Fig. 3). In this test all ΔC_i are negative to have the density of top solution lower than that of the bottom solution. The density difference between top and bottom solution is very low. Instability is present at the centre of the boundary and convection develops as fingers. Component of convective velocity along the z axis, V_z , on the plane section x z at the centre of the container. Time = 400 sec.

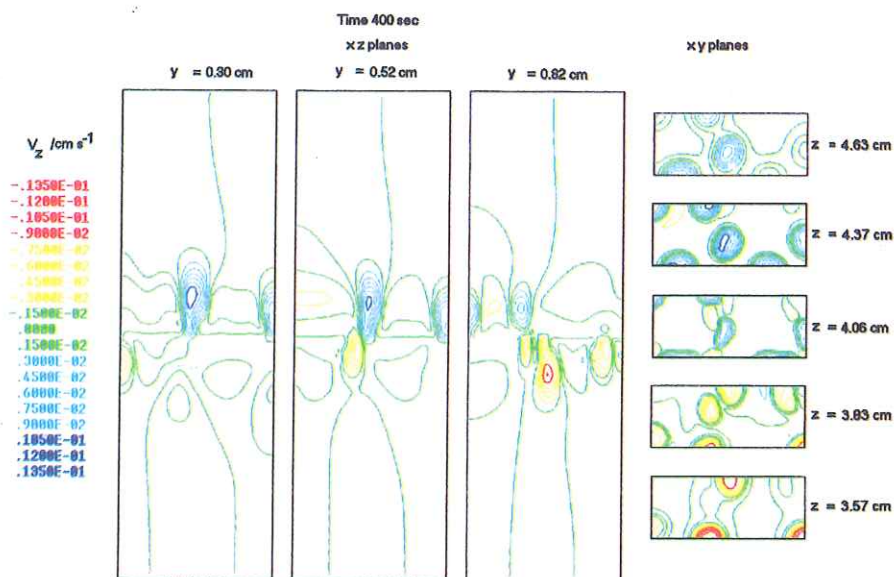


Figure 5 B

Contour lines of the V_z component of convective velocity in various sections of the container, according to the colour bar.

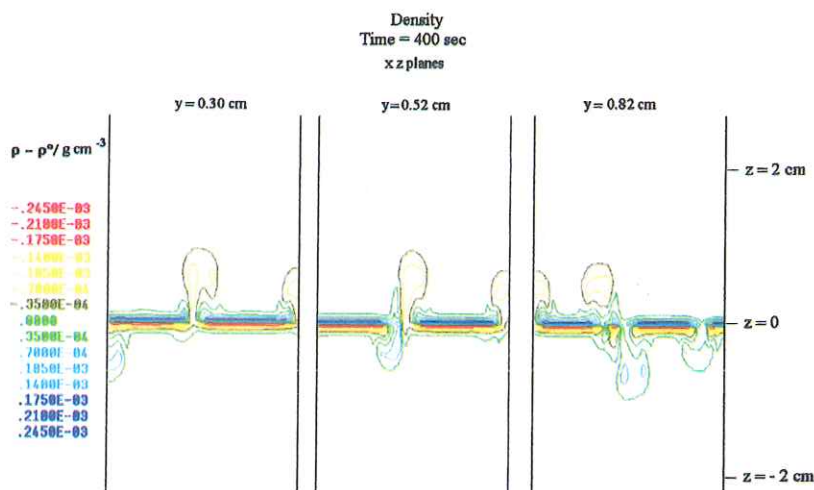


Figure 5 C

Contour lines of density in three x z vertical sections of the container

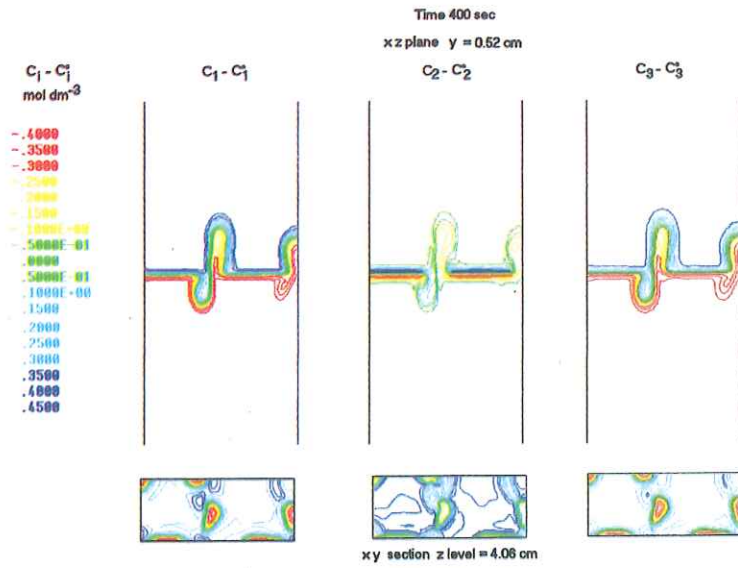
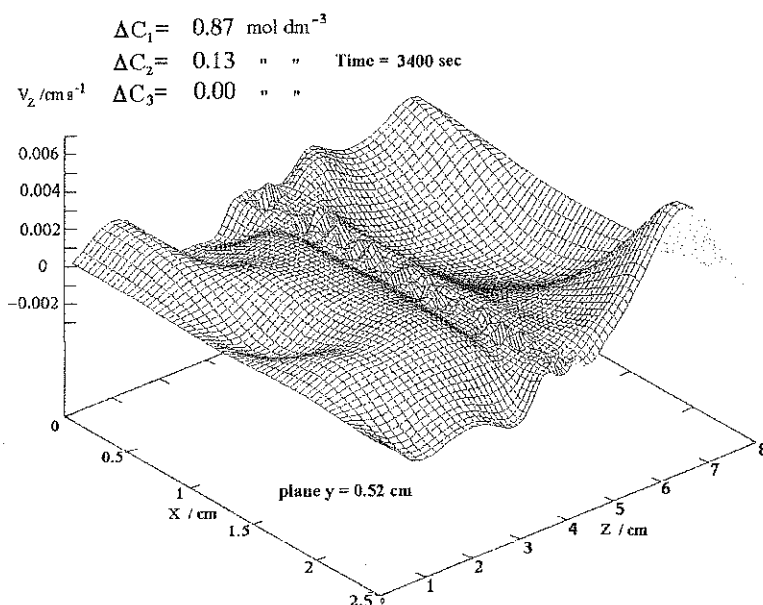


Figure 5 D

Concentration distribution of the three components in the central xz and xy sections of the container, according to the colour bar

Simulation (2)

Fig. 6 shows the evolution of convection in a system where gravitational instabilities are present both at the centre and at the borders of the diffusion boundary. The z (vertical) component of convective velocity on the central plane xz of the container ($y = 0.52$ cm) is plotted. The growth of fingers at the centre of the boundary and that of large convective cells on the upper and lower regions of the container (overstability) is evident. The V_z convective velocity on the upper and lower regions of the container is much larger than that inside the fingers region. However, in spite of this fact, the composition of solutions on the top and bottom of the container does not change appreciably during the simulation time, as it could be seen by plotting the density or the concentrations contours. This is due to the fact that convection in these regions involves solutions having compositions almost equal to those of the surrounding liquid. Fig. 6 has been taken at $t = 3400$ sec..

**Figure 6**

Simulation of DDC on the quaternary system Ethanol(1)-Tartaric acid(2)-Glucose(3)-Water: $\Delta C_1 = 0.87 \times 10^{-3}$, $\Delta C_2 = 0.13 \times 10^{-3}$, $\Delta C_3 = 0.00 / \text{mol cm}^{-3}$ (Point 2 of Fig. 3). The density conditions through the diffusion boundary correspond to those shown in Fig. 2A, instabilities are present at the centre and at the borders of the boundary. The figure shows the component of convective velocity along the z axis, V_z , on the vertical section xz at the centre of the container ($y = 0.52$ cm). The growth of fingers at the centre of the boundary ($z = 4$ cm) can be seen, as well as the large convective vortices involving the top and the bottom sides of the container (overstability). Time 3400 sec.

Simulation (3).

Fig. 7 shows the evolution of convection in a system where gravitational instabilities are present in two regions inside the diffusion boundary. The V_z component of convective velocity in the central section of the container ($y = 0.52$ cm) is plotted as in the previous Figures. The presence of two finger regions growing inside the diffusion boundary is evident. However, in this case, the evolution of convection is much slower than in the previous cases. This graph corresponds to $t = 18000$ sec.

Actually, it can be pointed out that the convective flow rate is not a true significant parameter, depending on the choice of the ΔC_i values (for each run, increasing these three values by a same factor, increases the convection rate).

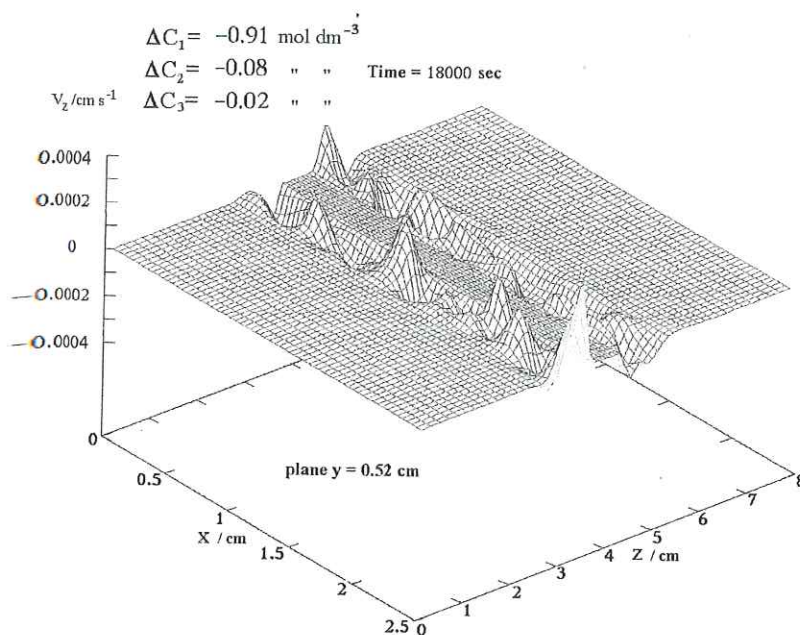
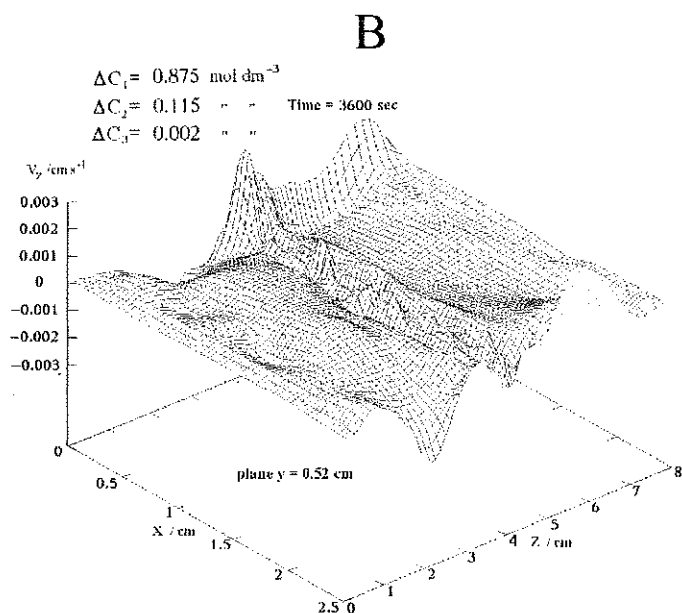
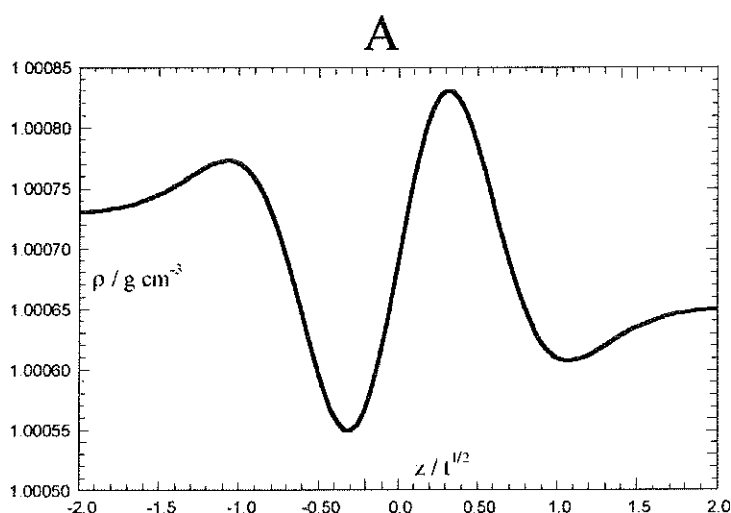


Figure 7

Simulation of DDC on the quaternary system Ethanol(1)-Tartaric acid(2)-Glucose(3)-Water: $\Delta C_1 = -0.91 \times 10^{-3}$, $\Delta C_2 = -0.08 \times 10^{-3}$, $\Delta C_3 = -0.02 \times 10^{-3} / \text{mol cm}^{-3}$ (Point 3 of Fig. 3). In this test all ΔC_i are negative to have the density of top solution lower than that of the bottom solution. The density conditions through the diffusion boundary correspond to those shown in Fig.2B, two instability regions are present inside the boundary. The figure shows the component of convective velocity along the z axis, V_z , on the plane section x z at the centre of the container ($y = 0.52$ cm). The growth of two finger areas can be seen. Time 18000 sec.

**Figure 8**

Simulation of DDC on the quaternary system Ethanol(1)-Tartaric acid(2)-Glucose(3)-Water: $\Delta C_1 = 0.875 \times 10^{-3}$, $\Delta C_2 = 0.115 \times 10^{-3}$, $\Delta C_3 = 0.002 \times 10^{-3} / \text{mol cm}^{-3}$ (simulation 4). **A**, density distribution through the diffusion layers due only to diffusion. **B**, component of convective velocity along the z axis, V_z , on the vertical section xz at the centre of the container ($y = 0.52 \text{ cm}$). The growth of fingers at the centre of the boundary ($z = 4 \text{ cm}$) can be seen, as well as the large convective vortices involving the top and the bottom sides of the container (overstability). Time 3600 sec.

Simulation (4).

In this case the ΔC_i concentration differences from top and bottom solutions have been moved nearer to the N line (Fig.3) with respect to the simulation case 2.

The *finger-like* instability at the centre of the diffusion layer has drastically increased (see Fig.8A) leading to a large density inversion at the centre of the diffusion layer. Meanwhile the opposite inversions at the borders (*overstability*) decreased.

It is interesting to note that convection develops as in case 2 and, in spite the large instability, fingers are cut where overstability convection appears (see Fig.8B). So that top and bottom solutions do not change appreciably their initial compositions after one hour run. (Time $t = 3600$ sec).

Conclusions

The simulation program assembled for describing the evolution of convection into gravitationally unstable diffusion layers has shown that in four component solutions dissipative structures may grow more complex than those found in ternary solutions.

These structures evolve according to the fluid-dynamic theory. Numerical simulation has shown such characteristic instabilities:

- (a) The possible growth of density inversions (static instability) at the borders of the diffusion layer and dynamic instability at the centre of the diffusion layer, with the contemporary presence of fingers and overstability-like convection.
- (b) The contemporary presence of two fingers regions inside the diffusion layer.

The simulation program has also shown that even in the presence of a very large instability, with density inversion, at the centre of the diffusion layer, if an overstability-like situation is present at the borders of the diffusion layer, the set of fingers growing at the centre of the boundary is stopped at the borders where the overstability-like convection is present.

The simulation program runs reasonably quickly on a PC (testing our models only a few days are required to simulate several hours inside the diffusion container) and seems an useful tool to describe the evolution of convection in diffusion layers. Contour plots of velocity components, of density, and those of the concentration of each component has been shown in Fig.5 B,C, and D.

The results of numerical computations suggest further experimental tests to observe directly the complex dissipative structures that may arise in diffusion layers of four component solutions.

Acknowledgement

This research has been supported by the Italian ASI under contracts ARS 99-17 and ARS C.I. 99/18

References.

1. J.S.Turner, *Buoyancy Effects in Fluids*, Cambridge Univ.Press 1979.
2. R.W.Schmitt, Double diffusion in oceanograph. *Annual Rev. Fluid Mech.*, **26**, 255-285 (1994)
3. T.J.McDoughall: Double-diffusive convection caused by coupled molecular diffusion. *J. Fluid. Mech.*, **126**, 379-397 (1983)
4. P.L. Vitagliano, C.Della Volpe, and Vitagliano: V.Gravitational Instabilities in Free Diffusion Boundaries. *J. Solution Chem.*, **13**, 549-562 (1984)
5. V.Vitagliano, G.Borriello, C.Della Volpe, and O.Ortona: Instabilities in free diffusion boundaries of NaCl-Sucrose-Water solutions at 25°C. *J. Solution Chem.*, **15**, 811-826 (1986)
6. D.G. Miller and V.Vitagliano: Experimental test of McDoughall's theory for the onset of convective instabilities in isothermal ternary systems. *J. Phys. Chem.*, **90**, 1706-1717 (1986)
7. V.Vitagliano: Diffusion and double diffusive convection in isothermal liquid boundaries. *Geophysical Monograph Series Vol. 94, Double-Diffusive Convection*. A.Brandt and H.J.S.,Fernando, Eds. AGU, Washington 1996 pp. 185-193.
8. P.L.Vitagliano, M.Andreozzi, D.Castagnolo, and V.Vitagliano: Experimental Tests and Numerical Simulation of Double Diffusive Convection in Isothermal Three component Diffusion Boundaries. *J. of Liquid Matter*, **94**, 113-126 (2001)
9. V.Vitagliano, A.Zagari, R.Sartorio, and M.Concione: Dissipative Structures and Diffusion in Ternary Systems. *J. Phys. Chem.*, **76**, 2050-2055 (1972)
10. V.Vitagliano: Some phenomenological and thermodynamic aspects of diffusion in multicomponent systems. *Pure & Appl. Chem.*, **63**, 1441-1448 (1991)
11. C.Y.Shen: The evolution of double diffusive instability. Salt fingers. *Physic Fluid A*, **1**(5), 829-844 (1989)
12. P.L.Vitagliano, L.Ambrosone, and Vitagliano: V. Gravitational instabilities in multicomponent free diffusion boundaries. *J. Phys. Chem.*, **96**, 1431-1437 (1992)
13. V.Vitagliano, R.Sartorio, S. Scala, and D.Spaduzzi: Diffusion in a Ternary System and the Critical Mixing Point. *J.Solution Chem.*, **7**, 605-621 (1978)
14. P.L.Vitagliano: A Computer code for simulation of DDC in four component systems. *Sisqua, User manual*, (2000): The numerical simulation program may be sent on request.
15. H.J.Tyrrel, and K.R.Harris: *Diffusion in Liquids*, Butterworth, London 1984.
16. L.Paduano, R.Sartorio, V.Vitagliano, J.G.Albright, and D.G.Miller: Measurement of the Mutual Diffusion Coefficients at one Composition of the Four-Component System: α -Cyclodextrin -L-Phenylalanine - Monobuthylurea - H₂O at 25°C. *J. Phys. Chem.*, **96**, 7478-7483 (1992)
17. C.A.J Fletcher: *Computational Techniques for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag (1988)
18. B.D.Nichols, C.W.Hirt, and Hotchkiss: R.S. SOLA-VOF: A solution algorithm for transient fluid flow with multiple free boundaries. *Los Alamos Scientific Lab.* 8355 (1980)
19. E.O.Brigham: *The Fast Fourier Transform* (Prentice-Hall) (1974)
20. P.N.Swartztrauber: *SIAM Rev.* **19**, 490-501 (1977).
21. J.Douglas, J.E.Gunn,: A general formulation of alternating direction methods. I. Parabolic and hyperbolic problems. *Numer. Math.* **6**, 428-453. (1964).

APPENDIX

Numerical discretisation.¹⁷⁻²¹

In order to solve the equation system (5-10) we need to write the spatial and time derivatives in a discretised form.

In our numerical simulation the spatial flow domain Ω is the test cell (the container), a volume with six rectangular faces. By convention, the reference frame orthogonal axes x, y , and z are parallel to the container edges.

L_x, L_y, L_z are the container dimensions in the x, y , and z directions. The gravity vector g is oriented along the z axis.

In order to compute the flow variables, the container is subdivided into smaller cells. Let NI, NJ, NK be the number of subdivisions (cells) along the x, y , and z axes.

Each cell in the flow domain can be identified by a set of three indices i, j, k , where $i \in [1, NI]$, $j \in [1, NJ]$, and $k \in [1, NK]$.

Let $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ be the cell size in the x, y , and z directions. It is convenient to take the cells size as constant in both x and y directions.

$$\Delta x = L_x / NI \quad \text{and} \quad \Delta y = L_y / NJ \quad (A1)$$

A constant stretching R is applied in z direction, starting from the middle of the container, where cell sizes $\Delta z_{NK/2} = \Delta z_{NK/2+1}$ are the smallest. Going upward and downward from there, the cell size increases with constant ratio R as follows:

$$\text{for } k > NK/2 \quad \Delta z_{k+1} = R \Delta z_k \quad (A2a)$$

$$\text{and for } k < NK/2 \quad \Delta z_{k-1} = R \Delta z_k \quad (A2b)$$

The flow variables ρ, P, C_1, C_2, C_3 are computed at each cell center; the velocity components u, v, w are computed at the centre of those cell's faces, that are orthogonal to the specific component direction (the so called fully staggered arrangement).

For example, in this program the velocity component $u_{i+1/2,j,k}$ is computed at the interface between cell (i,j,k) and cell $(i+1,j,k)$

Spatial derivatives in each cell are computed as follows.

$$\text{div } \mathbf{V} = \frac{u_{i+1/2,j,k} - u_{i-1/2,j,k}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1/2,k} - v_{i,j-1/2,k}}{\Delta y} + \frac{w_{i,j,k+1/2} - w_{i,j,k-1/2}}{\Delta z} \quad (A3)$$

$$\mathbf{V} \cdot \nabla u = u_{i-1/2,j,k} F_x + v_m F_y + w_m F_z \quad (A4)$$

where

$$v_m = (v_{i-1,j+1/2,k} + v_{i-1,j-1/2,k} + v_{i,j+1/2,k} + v_{i,j-1/2,k}) / 4 \quad (A5)$$

$$w_m = (w_{i-1,j,k+1/2} + w_{i-1,j,k-1/2} + w_{i,j,k+1/2} + w_{i,j,k-1/2}) / 4 \quad (A6)$$

For $u_{i-1/2,j,k} < 0$:

$$F_x = (u_{i+1/2,j,k} - u_{i-1/2,j,k}) / \Delta x \quad (A7)$$

while for $u_{i-1/2,j,k} \geq 0$:

$$F_x = (u_{i-1/2,j,k} - u_{i-3/2,j,k}) / \Delta x \quad (A8)$$

For $v_m < 0$:

$$F_y = (u_{i-1/2,j+1,k} - u_{i-1/2,j,k}) / \Delta y \quad (A9)$$

while for $v_m \geq 0$:

$$F_y = (u_{i-1/2,j,k} - u_{i-1/2,j-1,k}) / \Delta y \quad (A10)$$

For $w_m < 0$:

$$F_z = (u_{i-1/2,j,k+1} - u_{i-3/2,j,k}) / \Delta z_+ \quad (A11)$$

while for $w_m \geq 0$:

$$F_z = (u_{i-1/2,j,k} - u_{i-3/2,j,k-1}) / \Delta z_- \quad (A12)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_{i,j,k} - P_{i-1,j,k}}{\Delta x} \quad (A13)$$

$$\rho = \{H_1[(C_1)_{i,j,k} + (C_1)_{i-1,j,k}] + H_2[(C_2)_{i,j,k} + (C_2)_{i-1,j,k}] + H_3[(C_3)_{i,j,k} + (C_3)_{i-1,j,k}]\} / 2 \quad (A14)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 u = & \frac{[(u_{i+1/2,j,k} - u_{i-1/2,j,k}) / \Delta x] - [(u_{i-1/2,j,k} - u_{i-3/2,j,k}) / \Delta x]}{\Delta x} + \\ & + \frac{[(u_{i-1/2,j+1,k} - u_{i-1/2,j,k}) / \Delta y] - [(u_{i-1/2,j,k} - u_{i-1/2,j-1,k}) / \Delta y]}{\Delta y} + \\ & + \frac{[(u_{i-1/2,j,k+1} - u_{i-1/2,j,k}) / \Delta z_+] - [(u_{i-1/2,j,k} - u_{i-1/2,j,k-1}) / \Delta z_-]}{\Delta z_k} \end{aligned} \quad (A15)$$

where

$$\Delta z_+ = (\Delta z_{k+1} + \Delta z_k) / 2 \quad (A16a)$$

$$\Delta z_- = (\Delta z_k + \Delta z_{k-1}) / 2 \quad (A16b)$$

Similar formulas apply for the v and w velocity components in the y and z directions, and for C_1 , C_2 , C_3 .

Time discretisation is based on a two-level flux-splitting algorithm¹⁷.

$$\Delta T_{i,j,k}^{n+1} = T_{i,j,k}^{n+1} - T_{i,j,k}^n \quad (A17)$$

Here $T_{i,j,k}^n$ is the generic flow variable at time level n ; $\Delta T_{i,j,k}^{n+1}$ can be thought of as the correction to the solution at time-level n in order to advance to time level $n+1$, where Δt is the time step between levels n and $n+1$.

To compute $\Delta T_{i,j,k}^{n+1}$, the following three-stage procedure is adopted for each one of the six transport equations:

$$(1 - \beta \Delta t \underline{L}_{xx}) \Delta T_{i,j,k}^* = \Delta t \text{ RHS} \quad (\text{A18a})$$

$$(1 - \beta \Delta t \underline{L}_{yy}) \Delta T_{i,j,k}^{**} = \Delta T_{i,j,k}^* \quad (\text{A18b})$$

$$(1 - \beta \Delta t \underline{L}_{zz}) \Delta T_{i,j,k}^{n+1} = \Delta T_{i,j,k}^{**} \quad (\text{A18c})$$

The terms $\Delta T_{i,j,k}^*$ and $\Delta T_{i,j,k}^{**}$ in Eqs.(A18) represent the correction to the flow variables at each intermediate stage; RHS is the right hand side operator of the transport equations 6 to 9 (i.e. the spatial derivatives), applied to the flow solution at the time level n .

β is a constant that controls the amount of implicit terms in the solution procedure. It is usually set to a value 0.5. If $\beta = 0$ the fully explicit formulation is recovered, i.e. $\Delta T_{i,j,k}^{n+1} = \Delta t \text{ RHS}$.

$\underline{L}_{xx}$, $\underline{L}_{yy}$, $\underline{L}_{zz}$ are linear operators represented by tri-diagonal matrices, which apply to the correction to the flow variables at the intermediate stages. They are obtained from the convective and diffusive operators (Eqs.A4 and A5) by taking only those terms involving the derivatives of $T_{i,j,k}$ in one direction (x, y, or z, respectively). In the transport equation of each flow variable $T_{i,j,k}$, the terms containing the other flow variables are kept fixed at the time level n .

For example, the operator $\underline{L}_{xx}$ for the u-component of Eq.6 contains the following terms in the left, central and right diagonals:
for $u_{i-1/2,j,k} < 0$:

$$v/(\Delta x)^2, \quad -2v/(\Delta x)^2 + u_{i-1/2,j,k}/\Delta x, \quad v/(\Delta x)^2 - u_{i-1/2,j,k}/\Delta x \quad (\text{A19})$$

while for $u_{i-1/2,j,k} \geq 0$:

$$v/(\Delta x)^2 + u_{i-1/2,j,k}/\Delta x, \quad -2v/(\Delta x)^2 - u_{i-1/2,j,k}/\Delta x, \quad v/(\Delta x)^2 \quad (\text{A20})$$

Although this is not a fully implicit procedure, it seems to allow quite large time steps, with a limited amount of computation. A time step 100 times larger than the theoretical limit for explicit formulation is easily achieved.

Once the velocity corrections Δu^{n+1} , Δv^{n+1} , Δw^{n+1} have been evaluated with the above procedure, they have to be modified by adding a corrective term $\Delta \mathbf{V}_m$ in order to satisfy Eq.(5):

$$\text{div } \mathbf{V}^{n+1} = 0 \quad (\text{A21})$$

where $\mathbf{V}^{n+1}$ is a vector with component $(u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1})$, and

$$\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^n = \Delta \mathbf{V}^{n+1} + \Delta \mathbf{V}_m \quad (\text{A22})$$

Moreover, a pressure correction ΔP^{n+1} must be introduced in order to balance Eq.(6) with the added corrective term $\Delta \mathbf{V}_m$. To compute the terms $\Delta \mathbf{V}_m$ and ΔP^{n+1} , a Poisson equation for pressure correction ΔP^{n+1} is solved at each time step:

$$\nabla^2 (\Delta P^{n+1}) = -\text{div}(\Delta \mathbf{V}^{n+1})/\Delta t \quad (\text{A23})$$

then $\Delta \mathbf{V}_m$ is computed:

$$\Delta \mathbf{V}_m = \nabla(\Delta P^{n+1}) \Delta t \quad (\text{A24})$$

By substituting (A23) and (A24) into (A22), it turns out that Eq.(A21) is satisfied. The discretized expression of momentum transport, Eq.(6), is also satisfied, since a term $\nabla(\Delta P^{n+1})$ is added to the pressure gradient at the RHS (to be multiplied by Δt), and the term $\Delta \mathbf{V}_m$ is added to the velocity correction $\Delta \mathbf{V}^{n+1}$.

The Laplacian of pressure correction in equation (A23) is discretised in the same way as done for the other flow variables, and it gives a linear system based on a 7-diagonal matrix.

Solving equation (A23) at each time step is the main computational effort in the present method. A classical method like SOR or Conjugate Gradients (CG) could be used.

However, in this case, because the grid-size-related terms are constant in the x and y directions (but not in the z direction), a more efficient solver based on Fourier-transforms is to be preferred.

SOR and CG are iterative solvers, which means that the final solution is obtained by a sequence of corrections to an initial solution. Accuracy (*i.e.* the equation residuals) can be improved by increasing the amount of iterations.

Our solver, based on Fast Fourier-transforms, is a direct method: it means that the solution accuracy is related to the machine precision, while computation time is constant. It is faster than the previous methods. Details on the implementation of our Poisson solver for equation [A23] are not given in this paper; it was developed on the basis of model algorithms found in literature^{20,21}.

Boundary conditions.

In order to set the boundary conditions, a layer of fictitious cells is considered outside the container walls.

No-slip boundary conditions are applied in two ways, depending on the velocity component with respect to the wall.

Let's consider the wall normal to the x axis (similar formula apply for the other walls). In this case we set the $\mathbf{u}$ component differently from the others. By convention, the cells outside the walls normal to the x axis are numbered with $i = 0$ and $i = \text{NI}+1$:

$$\begin{array}{ll} u_{1/2,j,k} = 0 & u_{\text{NI}+1/2,j,k} = 0 \\ v_{0,j,k} = -v_{1,j,k} & v_{\text{NI}+1,j,k} = -v_{\text{NI},j,k} \\ w_{0,j,k} = -w_{1,j,k} & w_{\text{NI}+1,j,k} = -w_{\text{NI},j,k} \\ (C_1)_{0,j,k} = (C_1)_{1,j,k} & (C_1)_{\text{NI}+1,j,k} = (C_1)_{\text{NI},j,k} \\ (C_2)_{0,j,k} = (C_2)_{1,j,k} & (C_2)_{\text{NI}+1,j,k} = (C_2)_{\text{NI},j,k} \\ (C_3)_{0,j,k} = (C_3)_{1,j,k} & (C_3)_{\text{NI}+1,j,k} = (C_3)_{\text{NI},j,k} \end{array}$$

Free-slip boundary conditions are applied as follows. Let's consider again the wall normal to the x axis.

$$\begin{aligned}
 u_{1/2,j,k} &= 0 & u_{NI+1/2,j,k} &= 0 \\
 v_{0,j,k} &= v_{1,j,k} & v_{NI+1,j,k} &= v_{NI,j,k} \\
 w_{0,j,k} &= w_{1,j,k} & w_{NI+1,j,k} &= w_{NI,j,k} \\
 (C_1)_{0,j,k} &= (C_1)_{1,j,k} & (C_1)_{NI+1,j,k} &= (C_1)_{NI,j,k} \\
 (C_2)_{0,j,k} &= (C_2)_{1,j,k} & (C_2)_{NI+1,j,k} &= (C_2)_{NI,j,k} \\
 (C_3)_{0,j,k} &= (C_3)_{1,j,k} & (C_3)_{NI+1,j,k} &= (C_3)_{NI,j,k}
 \end{aligned}$$

Free slip boundary conditions at the vertical walls turn out to be more effective, probably because of the quite large size Δx and Δy chosen in our numerical tests.

Symbols

$\mathbf{g}$	gravity acceleration vector.
i	cells numbering index in the x direction.
j	cells numbering index in the y direction.
k	cells numbering index in the z direction.
$\mathbf{n}$	vector normal to the boundary surfaces.
P	pressure.
t	time.
u	velocity component along x axis.
v	velocity component along y axis.
w	velocity component along z axis.
C_i	concentration of component i.
D_{ij}	components of the diffusion coefficient matrix D.
H_i	density gradients: $H_i = \partial \rho / \partial C_i$
L_x	test cell size in x-direction.
L_y	test cell size in y-direction.
L_z	test cell size in z-direction.
NI	total number of cells in x-direction.
NJ	total number of cells in y-direction.
NK	total number of cells in z-direction.
R	stretch ratio: if $k > NK/2$ then $\Delta z_{k+1} = R \Delta z_k$, otherwise $\Delta z_{k-1} = R \Delta z_k$
T	final time
$T_{i,j,k}^n$	indicates any generic flow variable at time n
$\mathbf{V}$	velocity vector.
x	first coordinate axis of the reference frame.
y	second coordinate axis of the reference frame.
z	third coordinate axis of the reference frame.
Δ	difference
∇^2	Laplacian.
∇	gradient.
ν	kinematic viscosity.

- ρ density.
- ρ_0 reference density (density of a solution where concentrations C_i are assumed = 0 in the simulation program, corresponding to C_i^0 in the actual solutions).
- Ω spatial computational domain (corresponding to the container).
- $\partial\Omega$ boundary surfaces of the spatial computational domain.
- Δx cell size in x-direction (constant).
- Δy cell size in y-direction (constant).
- Δz_k cell size in z-direction (depending on k index).

Dipartimento di Chimica, Università Federico II Napoli, Via Cintia Monte S. Angelo
Tel. +39081 674245 Fax +39081 674199 E-mail Vita@chemistry.unina.it

Behaviour of a cross-sectional measure for axisymmetric Deformations in an isotropic elastic cylindrical plate

Nota di James N. Flavin¹, Barry Gleeson²

Presentata dal Socio James N. Flavin
(Adunanza dell'1 giugno 2001)

Abstract – A homogeneous, isotropic linear elastic right cylindrical plate is considered. Its plane boundaries are subjected to imposed displacements (zero displacements in certain circumstances), it is assumed that body forces are absent, and that a radially symmetric torsionless deformation is induced therein. A non-negative cross-sectional measure of deformation over a meridional cross-section is defined in this context, and second order differential inequalities are obtained (corresponding to generalized convexity). Various implications of this are discussed, including spatial decay estimates (with respect to the radial coordinate r).

Riassunto – Si considera una piastra cilindrica elastica lineare isotropa omogenea. Si deforma la piastra quando si sollecita la sua superficie curva da azioni, e le sue superfici piane sono soggette a spostamenti dati (forse nulli); sono nulle le forze di massa, e si assume una deformazione con simmetria rotazionale. Si definisce una misura trasversale, definita positiva, della deformazione in questo contesto, e si prova per questa misura delle disuguaglianze differenziali del tipo convesso. Dalle disuguaglianze si derivano delle implicazioni, stime di decadimento spaziale comprese.

1 – INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Spatial decay estimates in elasticity have been studied extensively in recent years. The original impetus for these lay in the need to justify Saint Venant's principle. The latter work is associated with problems of the Neumann type, but there is also a considerable body of work associated with problems of the Dirichlet type. Reviews of material of this type are available in [1] – [4]. The work considered in this paper is broadly associated with boundary conditions of the Dirichlet type, and resembles that reported in [5]. The principal part of the work reported in this paper, corresponding to zero displacement on the lateral plane boundaries, is associated with an extension of Saint-Venant's principle for an elastic body, perhaps first identified by Goodier [6] in the following terms:

“If forces are applied to a body over a small part adjacent to a rigidly fixed part (of an elastic body), the stress and strain induced are appreciable only within distances comparable with the

^{1,2} National University of Ireland, Galway, Ireland. Department of Mathematical Physics.

dimensions of the loaded part, whether the applied forces form a non-zero resultant or not".

The present paper is concerned with a right cylinder (cylindrical plate) consisting of homogeneous isotropic linear elastic material. It is deformed by suitable actions on its boundary, body forces are assumed absent, and the deformation is supposed to be an axisymmetric (torsionless) one. We define, over a meridional cross-section, a non-negative cross-sectional measure of deformation, consisting of a certain combination of squares of the displacement gradients. It is first proved that the cross-sectional measure is a generalized convex function of the radial coordinate r , and some implications of this property are discussed.

Confining attention to a cylinder whose plane faces are subject to zero displacement, a sharper inequality for the cross-sectional measure is derived. Its implications are discussed and include upper estimates for the decay (with radial distance) of effects away from the activated curved boundaries, for a finite, and also for a semi-infinite, hollow cylinder. The case of a solid cylinder is also discussed. Pointwise upper bounds for the radial displacement are deduced from the estimates for the cross-sectional measure of deformation in the case of zero displacements on the plane faces.

2 – MERIDIONAL CROSS-SECTIONAL MEASURE: DIFFERENTIAL INEQUALITIES AND ESTIMATES

We consider a right cylinder of elastic material as previously described. The cylinder is supposed to be in equilibrium under actions on its curved boundary/boundaries and under imposed displacements (which may be zero) on its plane faces, body forces being absent. The usual cylindrical polar coordinates are denoted by r, z , and the displacement components in the radial and axial directions are denoted by $u = u(r, z)$, $w = w(r, z)$ respectively. The displacement components, which are supposed to be C^3 functions throughout, satisfy the following equations

$$\left. \begin{aligned} (\alpha + 1) (r^{-1} (ru)_r)_r + u_{zz} + \alpha w_{rz} &= 0 \\ \alpha r^{-1} (ru_z)_r + r^{-1} (rw_r)_r + (\alpha + 1) w_{zz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

where suffices attached to u and w denote partial differentiation with respect to the appropriate variables, both here and subsequently. The constant α , satisfying

$$\alpha = (1 - 2\sigma)^{-1}, \quad (2.2)$$

is assumed to be non-negative, σ (such that $-1 < \sigma < 1/2$) being Poisson's ratio. The boundary conditions on the plane faces $z = 0, h$ (h being a constant) are supposed to be

$$\left. \begin{aligned} u &= 0, \\ w_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{on } z = 0, h. \quad (2.3)$$

The second of the two conditions implies that

$$w = f_0 \quad \text{on} \quad z = 0, \quad w = f_h \quad \text{on} \quad z = h,$$

where f_0, f_h are constants.

We define the (meridional) cross-sectional measure of deformation

$$F(r) = \int_0^h [u_z^2 + w_r^2] dz. \quad (2.4)$$

Successively differentiating (primes denoting differentiation with respect to the argument) we obtain

$$F'(r) = \int_0^h 2[u_z u_{zr} + w_r w_{rr}] dz, \quad (2.5)$$

$$F''(r) = \int_0^h 2[u_{zr}^2 + w_{rr}^2] dz + I_1 + I_2, \quad (2.6)$$

wherein

$$I_1 = \int_0^h 2u_z u_{rrz} dz \quad (2.7)$$

and

$$I_2 = \int_0^h 2w_r w_{rrr} dz. \quad (2.8)$$

Integrating by parts using the boundary conditions (2.3₁) in (2.7) we obtain

$$I_1 = \int_0^h -2[u_{zz} u_{rr}] dz \quad (2.9)$$

whereupon substitution of u_{rr} using (2.1₁) yields

$$I_1 = \int_0^h 2(\alpha + 1)^{-1} [(\alpha + 1) u_{zz} (r^{-1} u_r - r^{-2} u) + u_{zz}^2 + \alpha u_{zz} w_{rz}] dz. \quad (2.10)$$

Again integration by parts, and the boundary conditions (2.3₁) gives

$$I_1 = \int_0^h 2[r^{-2} u_z^2 - r^{-1} u_z u_{zr} + (\alpha + 1)^{-1} u_{zz}^2 + \alpha (\alpha + 1)^{-1} u_{zz} w_{rz}] dz. \quad (2.11)$$

Substituting for w_{rr} using (2.1₂) in (2.8), and integration by parts using (2.3₂), gives

$$I_2 = \int_0^h 2[(\alpha + 1) w_{rz}^2 - r^{-1} w_r w_{rr} + r^{-2} w_r^2 + \alpha w_{rz} (r^{-1} (ru)_r)_r] dz. \quad (2.12)$$

Combining (2.11) - (2.12) we obtain

$$I_1 + I_2 = \int_0^h 2[(\alpha + 1) w_{zr}^2 + (\alpha + 1)^{-1} u_{zz}^2 + r^{-2} (u_z^2 + w_r^2) + \alpha (\alpha + 1)^{-1} w_{zr} \{(\alpha + 1) (r^{-1} (ru)_r)_r + u_{zz}\} - r^{-1} (w_r w_{rr} + u_z u_{zr})] dz. \quad (2.13)$$

Using (2.1₁) to reduce the last term in the integrand of (2.13), and using (2.4) - (2.5), we obtain the following

$$I_1 + I_2 = \int_0^h 2(\alpha + 1)^{-1} [(2\alpha + 1) w_{zr}^2 + u_{zz}^2] dz - r^{-1} F'(r) + 2r^{-2} F(r). \quad (2.14)$$

Combining (2.6) and (2.14), we can re-write F'' in accordance with

$$F''(r) + r^{-1}F'(r) - 2r^{-2}F(r) = \int_0^h 2 \left[u_{zr}^2 + w_{rr}^2 + (\alpha + 1)^{-1} u_{zz}^2 + (2\alpha + 1)(\alpha + 1)^{-1} w_{zr}^2 \right] dz. \quad (2.15)$$

Since all the terms in the above integrand are non-negative we obtain the following proposition:

Proposition 1. *The cross-sectional measure $F(r)$ (defined by (2.4)) of the deformation in an elastic cylinder with boundary conditions on its plane boundaries*

$$u = 0, w_r = 0 \quad \text{on} \quad z = 0, h$$

satisfies the (generalized convexity) inequality

$$r^2 F''(r) + r F'(r) - 2F(r) \geq 0. \quad (2.16)$$

Upon application of the transformation $r = e^t$ (2.16) implies the following:

$$\frac{d^2 F}{dt^2} \geq 0,$$

viewing F as a function of t . In view of the elementary inequality for such a function

$$F(t) \geq F(A) + (t - A) \left\{ \frac{dF}{dt} \right\}_{t=A}$$

for arbitrary A . Reverting to the original independent variable r , we obtain a corresponding inequality for functions of r satisfying (2.16):

$$F(r) \geq F(a) + \ln(r/a) \left\{ r \frac{dF}{dr} \right\}_{r=a} \quad (2.17)$$

for arbitrary $a (> 0)$. This may be used to obtain the following Proposition (which has some resemblance to Liouville's Theorem – for harmonic functions, for example):

Proposition 2. *For an infinite elastic plate $0 < r < \infty$, $0 \leq z \leq h$, under the circumstances previously described, a necessary and sufficient condition that $F(r)$ be everywhere bounded is that the displacement components satisfy*

$$u \equiv 0, \quad w \equiv Az + B, \quad (2.18)$$

where A, B are constants.

The sufficiency is obvious, and we proceed to prove the necessity. To prove this we use (2.17): In order that (the non-negative quantity) $F(r)$ remain finite as $r \rightarrow \infty$ it is necessary that

$$\left\{ r \frac{dF}{dr} \right\}_{r=a} \leq 0;$$

likewise, in order that $F(r)$ remain finite as $r \rightarrow 0$ it is necessary that

$$\left\{ r \frac{dF}{dr} \right\}_{r=a} \geq 0.$$

Since a is arbitrary, it follows from these latter two inequalities that

$$\frac{dF}{dr} \equiv 0, \quad 0 < r < \infty.$$

It follows from this that

$$\frac{d^2 F}{dr^2} \equiv 0, \quad 0 < r < \infty.$$

Thus, it follows from (2.16) that

$$F(r) \leq 0,$$

whence, in view of the non-negativity of F ,

$$u_z \equiv w_r \equiv 0.$$

The foregoing result together with (2.1), (2.3) together imply (2.18). $\square$

A strengthening of inequality (2.16) in the context described, may be obtained by considering $F^{1/2}$ the (positive) square root of the measure F : it gives rise to an initial simple, transparent upper estimate for $F^{1/2}$. One finds, assuming that $F \neq 0$, that

$$(F^{1/2})'' = (2FF'' - \{F'\}^2) (4F^{3/2})^{-1} \quad (2.19)$$

and this together with (2.4), (2.5), (2.15) and the Schwarz inequality, yields

$$(F^{1/2})'' \geq F^{-1/2} \int_0^h (\alpha + 1)^{-1} [u_{zz}^2 + (2\alpha + 1) w_{zr}^2] dz - \frac{1}{2} r^{-1} F^{-1/2} F' + r^{-2} F^{1/2} \quad (2.20_1)$$

whence (omitting the first term on the right of (2.20₁))

$$(F^{1/2})'' + r^{-1} (F^{1/2})' - r^{-2} F^{1/2} \geq 0. \quad (2.20_2)$$

A standard comparison theorem (e.g. [7]) yields

$$F^{1/2} \leq G \quad (2.21)$$

where G satisfies the differential equation corresponding to the differential inequality (2.20₂) and the same boundary conditions

$$\left. \begin{aligned} r^2 G'' + r G' - G &= 0, \\ G(a) &= F^{1/2}(a), G(b) = F^{1/2}(b), \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

where it is envisaged that the (activated) curved boundaries are $r = a$, $r = b$ ($0 < a < b$).

We deduce the following proposition which contains a simple, transparent estimate for F :

Proposition 3. *The cross-sectional measure $F(r)$ (defined by (2.4)) of the axisymmetric deformation in the elastic cylindrical plate with boundary conditions on its plane faces*

$$u = 0, w_r = 0 \quad \text{on} \quad z = 0, h$$

and with (activated) curved boundaries $r = a, r = b$, satisfies

$$F^{1/2}(r) \leq \{F^{1/2}(a)(b/r - r/b) + F^{1/2}(b)(r/a - a/r)\}(b/a - a/b)^{-1}. \quad (2.23)$$

3 – IMPROVED ESTIMATES INCLUDING DECAY ESTIMATES

In this section improved estimates (including decay estimates) are obtained by bounding below, in terms of a non-zero quantity, the first term on the right of (2.20₁). One easily deduces from (2.20₁) that, for $F \neq 0$,

$$(F^{1/2})'' + r^{-1}(F^{1/2})' - r^{-2}F^{1/2} \geq (\alpha + 1)^{-1} F^{-1/2} \int_0^h [u_{zz}^2 + w_{zr}^2] dz. \quad (3.1)$$

Application of inequality³ (A1) with $\psi = w_r$, and inequality (A2) with $\psi = u$, bearing in mind (2.4), yields

$$(F^{1/2})'' + r^{-1}(F^{1/2})' - \{\pi^2 h^{-2}(\alpha + 1)^{-1} + r^{-2}\} F^{1/2} \geq 0, \quad (3.2)$$

assuming $F \neq 0$.

Using a standard comparison theorem (e.g. [7]) one finds

$$F^{1/2} \leq G \quad (3.3)$$

where G satisfies the differential equation corresponding to (3.2)

$$G'' + r^{-1}G' - \{\pi^2 h^{-2}(\alpha + 1)^{-1} + r^{-2}\} G = 0 \quad (3.4)$$

together with the same boundary conditions

$$G(a) = F^{1/2}(a), G(b) = F^{1/2}(b), \quad (3.5)$$

$r = a, b$ again being the (activated) curved boundaries.

³Inequalities such as (A1) are to be found in the Appendix.

Using the comparison result embodied in (3.3) – (3.5) we obtain on solving explicitly

Proposition 4. *The cross-sectional measure $F(r)$ – defined by (2.4) – of the axisymmetric deformation in the elastic cylinder $(0 <) a < r < b$, with null displacement conditions on its plane faces*

$$u = w = 0 \quad \text{on} \quad z = 0, h,$$

satisfies

$$F^{1/2}(r) \leq F^{1/2}(a) \frac{(r, b)}{(a, b)} + F^{1/2}(b) \frac{(a, r)}{(a, b)} \quad (3.6)$$

where (A, B) is defined by

$$(A, B) = I_1(\kappa A) K_1(\kappa B) - I_1(\kappa B) K_1(\kappa A) \quad (3.7)$$

where I_1, K_1 denote modified Bessel functions of order 1 of the first and second kinds respectively, and where the constant κ is given by

$$\kappa = \pi h^{-1} (\alpha + 1)^{-1/2}. \quad (3.8)$$

Bearing in mind the asymptotic behaviour of $I_1(x), K_1(x)$ as $x \rightarrow \infty$, that is

$$K_1(x) \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad x \rightarrow \infty$$

and

$$I_1(x) = O(x^{-1/2} e^x) \quad \text{as} \quad x \rightarrow \infty,$$

one deduces from (3.6) – (3.8) a result of the Phragmén-Lindelöf type:

Proposition 5. *The cross-sectional measure $F(r)$ of the axisymmetric deformation in the semi-infinite elastic cylinder $0 < a \leq r < \infty$ with zero displacement boundary conditions on its plane faces $z = 0, h$, satisfies*

$$F^{1/2}(r) \leq F^{1/2}(a) \frac{K_1(\kappa r)}{K_1(\kappa a)} \quad (3.9)$$

the constant κ being given by (3.8), provided the asymptotic condition

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} F^{1/2}(r) \exp[-\kappa r] = 0 \quad (3.10)$$

obtains.

Remark 1. We note that

$$\frac{K_1(\kappa r)}{K_1(\kappa a)} \sim \sqrt{\frac{a}{r}} e^{-\kappa(r-a)}$$

for "large" values of the relevant arguments, yielding (at least) exponential decay away from the edge $r = a$ of

$$\{rF(r)\}^{1/2} \{aF(a)\}^{-1/2},$$

for "large" values of r, a (i.e. large values of the dimensionless quantities $\kappa r, \kappa a$). Indeed, it is conjectured that, for $r \geq a$,

$$\frac{K_1(\kappa r)}{K_1(\kappa a)} \leq \sqrt{\frac{a}{r}} e^{-\kappa(r-a)} \quad (3.11)$$

in which case the upper bound (3.9) would imply the more transparent one

$$(rF(r))^{1/2} \leq (aF(a))^{1/2} \exp[-\kappa(r-a)].$$

for $r \geq a$. Numerical evidence strongly suggests that (3.11) is true.

A result similar to the foregoing may also be obtained for a solid cylinder. Making use of (3.6) – (3.8), together with

$$I_1(x) \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow 0$$

and

$$K_1(x) = O(x^{-1}) \quad \text{as } x \rightarrow 0,$$

the following result may be obtained:

Proposition 6. *The cross-sectional measure $F(r)$ of the axisymmetric deformation in a solid elastic cylinder $0 < r \leq b$ with null displacement boundary conditions on its plane faces, satisfies*

$$F^{1/2}(r) \leq F^{1/2}(b) \frac{I_1(\kappa r)}{I_1(\kappa b)} \quad (3.12)$$

the constant κ being given by (3.8), provided the asymptotic condition

$$\lim_{r \rightarrow 0} F^{1/2}(r) r = 0 \quad (3.13)$$

obtains.

Remark 2. For “large” values of the relevant arguments

$$\frac{I_1(\kappa r)}{I_1(\kappa b)} \sim \sqrt{\frac{b}{r}} e^{-\kappa(b-r)},$$

yielding (at least) exponential decay of

$$\{rF(r)\}^{1/2} \{bF(b)\}^{-1/2}$$

away from the edge $r = b$.

Remark 3. Suppose that the normal displacement component $w(r, z)$ and the complementary shear stress components $\tau_{rz} = \mu(u_z + w_r)$ of traction are specified on $r = a, b$. Then $F(a)$ and $F(b)$ are calculable therefrom and (3.6) etc. are available in fully explicit form.

Remark 4. Using the inequality (A3), given in the Appendix, with $\psi = u$, the pointwise bound for $u(r, z)$

$$|u(r, z)| \leq \sqrt{z(1 - z/h)} F^{1/2}(r) \quad (3.14)$$

is obtained.

REFERENCES

- [1] Knowles, J.K. (1996) *On Saint-Venant's principle in the two-dimensional linear theory of elasticity*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, **21**, 1 – 22.
- [2] Horgan, C.O. and Knowles, J.K. (1989) *Recent developments concerning Saint-Venant's principle*. Advances in Applied Mechanics (T.Y. Wu and J.W. Hutchison eds.), Academic Press, New York, **23**, 179 – 269.
- [3] Horgan, C.O. (1989), *Recent developments concerning Saint-Venant's principle: an update*. Applied Mechanics Reviews, **42**, 295 – 303.
- [4] Horgan, C.O. (1996), *Recent developments concerning Saint-Venant's principle: a second update*. Applied Mechanics Reviews, **49**, 101 – 111.
- [5] Flavin, J.N. and Rionero S. (1993), *Decay and other estimates for an elastic cylinder*. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, **46**, 299 – 309.
- [6] Goodier, J.N. (1942), *An extension of Saint-Venant's principle, with applications*. Journal of Applied Physics, **13**, 167 – 171.
- [7] Flavin, J.N. and Rionero, S. (1995), *Qualitative Estimates for Partial Differential Equations: An Introduction*, CRC Press, Boca Raton, Florida.

APPENDIX

One needs the following elementary inequalities (e.g. [7]):

Inequality 1

For arbitrary $\psi(z) \in C^1(0 \leq z \leq h)$, such that $\psi(0) = \psi(h) = 0$, one has

$$\int_0^h \psi_z^2 dz \geq \frac{\pi^2}{h^2} \int_0^h \psi^2 dz. \quad (A1)$$

Inequality 2

For arbitrary $\psi(z) \in C^2(0 \leq z \leq h)$, such that $\psi(0) = \psi(h) = 0$, one has

$$\int_0^h \psi_{zz}^2 dz \geq \frac{\pi^2}{h^2} \int_0^h \psi_z^2 dz. \quad (A2)$$

Inequality 3

For arbitrary $\psi(z) \in C^1(0 \leq z \leq h)$, such that $\psi(0) = \psi(h) = 0$, one has

$$\psi^2(z) \leq \frac{z}{h} (h - z) \int_0^h \psi_z^2 dz, \quad (A3)$$

as a consequence of Schwarz's inequality.

Durabilità all'acqua del legante gesso

Nota di Giuseppe Frigione e Luciano Bonavita¹

Presentata dal Socio Riccardo Sersale
(Adunanza del 9 novembre 2001)

Key words: building matter, durability, gypsum, hydraulicity, leaching, water resistance.

Abstract – Gypsum, when outdoor employed, slowly dissolves. Tests on the surface impregnations with different water proofing agents have been carried out, in order to assure a greater water durability to the gypsum constructive works. The experimental investigation performed in laboratory has been also tested through experiments outdoor.

Riassunto – Il legante gesso, quando usato per esterni, si dissolve lentamente. Sono state condotte prove di impregnazione superficiale di manufatti in gesso con vari agenti, così da assicurare durabilità all'acqua del manufatto. La sperimentazione condotta in laboratorio è stata verificata sul campo.

1 - INTRODUZIONE

Il gesso legante trova sin dall'antichità larga diffusione per fabbricare intonaci, pannelli, fregi, sottofondi per pavimenti e per l'ancoraggio di manufatti metallici su supporti lapidei. Al giorno d'oggi l'uso maggiore che si fa di questo materiale é nella confezione di intonaci per finiture interne.

Da tempo il mondo tecnico dedica grande interesse alla possibilità di utilizzare il gesso anche in applicazioni di tipo strutturale. Sono noti gli indiscutibili benefici del materiale gesso che vanno dalla resistenza al fuoco al potere fonoassorbente, all'alta coibenza termica, alla buona resistenza a

¹ Università degli Studi della Calabria, Dipartimento di Ingegneria Chimica e dei Materiali.
87030 Rende, Cosenza (Italy).

compressione e, cosa non trascurabile, alla economicità. Infatti il fabbisogno termico per la preparazione del gesso é circa 200 - 300 kcal per kg di gesso cotto, contro un fabbisogno termico del cemento Portland di circa 900 - 1000 kcal/kg e della calce intorno a 600 - 700 kcal per kg di legante.

E' anche importante la rapidità di esecuzione dei manufatti confezionati con gesso, in confronto al tempo richiesto dai materiali tradizionali: in alcuni casi si ha un risparmio di tempo dell'ordine del 50%, incidendo sensibilmente sul costo finale del costruito.

In ambienti secchi la stabilità del gesso é eccellente, mentre in ambienti umidi o quando é usato per l'esterno, si ha una sua lenta dissoluzione. Nell'industria edile si tenta perciò di rendere resistente all'acqua il gesso in modi diversi. Uno dei più diffusi é l'applicazione sulla superficie di cere, allo stato fuso o disciolta in solventi, di fluosilicati, di resine viniliche. Quando tuttavia tali rivestimenti si usurano o si fessurano, il gesso viene a contatto con l'ambiente esterno e ne subisce l'attacco.

Scopo del presente lavoro é studiare la possibilità di impregnare i manufatti in gesso con idoneo monomero, provocandone successivamente la polimerizzazione. In tal modo i granuli di gesso idratato saranno avviluppati da una pellicola impermeabile all'acqua e abrasioni o scalfiture non altereranno la durabilità del manufatto.

Sulla base di prove preliminari, sono stati individuati tre liquidi impregnanti di bassa viscosità e di limitata grandezza molecolare date le piccole dimensioni dei capillari presenti nella pietra di gesso indurita da penetrare. Con essi è stata trattata una serie di provini di gesso, caratterizzati da porosità capillare diversa. I provini così trattati sono stati caratterizzati per quanto attiene la resistenza all'acqua e la resistenza meccanica.

2 - MATERIALI

2.1 – Gesso

Sono stati utilizzati due gessi commerciali. Essi provengono rispettivamente dalla Gessocalabro (RC) e dalla Rizzo (CS). Le loro caratteristiche sono riportate in tabella 1. Poiché i comportamenti dei due gessi sono stati pressoché identici, riferiamo solo dei risultati ottenuti col "Gessocalabro".

Tabella 1: Caratteristiche chimiche dei gessi utilizzati

Prodotto	SO ₃ %	CaO %
Gesso Gessocalabro	55,8	40,6
Gesso Rizzo	58,0	41,0

2.2 - Liquidi impregnanti

Gli impregnanti utilizzati sono riportati in tabella 2.

Tabella 2: Impregnanti utilizzati

Impregnante 1	Metilmetacrilato (1, 2)
Impregnante 2	Alchilalcossisilano (3)
Impregnante 3	Isobutiltrimetossisilano (4)

3 - PARTE SPERIMENTALE

Sono stati preparati provini, 40 x 40 x 160 mm, miscelando gesso e acqua in accordo con la UNI 6782. Questi sono stati stagionati per 2 giorni a 20°C e UR > 80% e poi 14 giorni in ambiente laboratorio. Per valutare l'influenza della porosità sulla penetrazione dei liquidi impregnanti, e l'influenza del loro grado di riempimento con acqua, i provini sono stati preparati con rapporti acqua/gesso diversi (0,40 e 0,60) e sottoposti, a fine stagionatura, ad un trattamento termico, mantenendoli per 24 ore alle temperature di 20, 40, 60, 80 e 100 °C, rispettivamente.

Quale termine di paragone sono stati preparati provini che non hanno subito il trattamento di impregnazione.

Il liquido impregnante è stato pennellato sul manufatto in prova sino a rifiuto. La polimerizzazione è stata effettuata:

- Impregnante 1: immergendo in acqua i provini a 80°C per 24 ore;
- Impregnante 2: in aria a 20°C;
- Impregnante 3: in aria a 20°C.

La quantità di monomero assorbito dai provini è stata determinata per differenza di pesata del provino non trattato e del provino trattato.

Dopo 30 giorni, tre provini sono stati sottoposti all'azione solvente dell'acqua, determinando la perdita di peso dopo 24 ore di pioggia (5). Altri tre provini sono stati sottoposti a prove di flessione e compressione.

Al fine di verificare sul campo il trattamento proposto, sono state preparate due panchine con il gesso "Gessocalabro". Rapporto acqua/gesso 0,60. Al fine di migliorare l'attitudine a sopportare carichi, è stato utilizzato un impasto contenente il 5% di fibre in vetro E. Una panchina, dopo 14 giorni di stagionatura a 20 ± 3 °C e 70 ± 15 % U.R., è stata trattata con il liquido impregnante isobutiltrimetossisilano. Le panchine sono state poi poste per due anni in ambiente esterno, sottoposte a pioggia, gelo ed, in alternanza, a forte irradiazione solare. La panchina non trattata è stata il termine di paragone.

4 - RISULTATI E DISCUSSIONE

Dalla figura 1, in cui sono diagrammati gli assorbimenti di miscela impregnante, si osserva che questo assorbimento cresce all'aumentare della temperatura di pre-trattamento. Ciò, perché il monomero sostituisce l'acqua nei capillari la quale viene man mano espulsa in maggior quantità; l'assorbimento cresce all'aumentare del rapporto acqua/gesso in quanto cresce la quantità di acqua in giuoco.

I valori della perdita di peso, indice della scarsa durabilità all'acqua, dei provini impregnati con i diversi liquidi e dei provini non impregnati, sono diagrammati in figura 2. Si nota che il trattamento con l'impregnante 1, pur mostrando un miglioramento rispetto al tal quale, non garantisce resistenza all'acqua, nonostante l'elevato assorbimento di monomero.

I trattamenti con i liquidi 2 e 3 assicurano, d'altra parte, una ottima resistenza all'acqua. In tutti i casi, la temperatura del trattamento termico

non ha influenza, tranne che per il trattamento a 100 °C. In questo caso, però, si sono osservate sui provini lesioni accentuate, che evidentemente ne hanno compromesso il comportamento.

Nelle figure 3 e 4 sono riportati i valori di resistenza a compressione e flessione, termine di paragone gli analoghi provini non trattati. Si osserva che tutti i provini trattati con i liquidi impregnanti mostrano un incremento delle caratteristiche meccaniche. I maggiori incrementi si hanno per il trattamento con l'impregnante 1, seguito dal 2 e dall'impregnante 3.

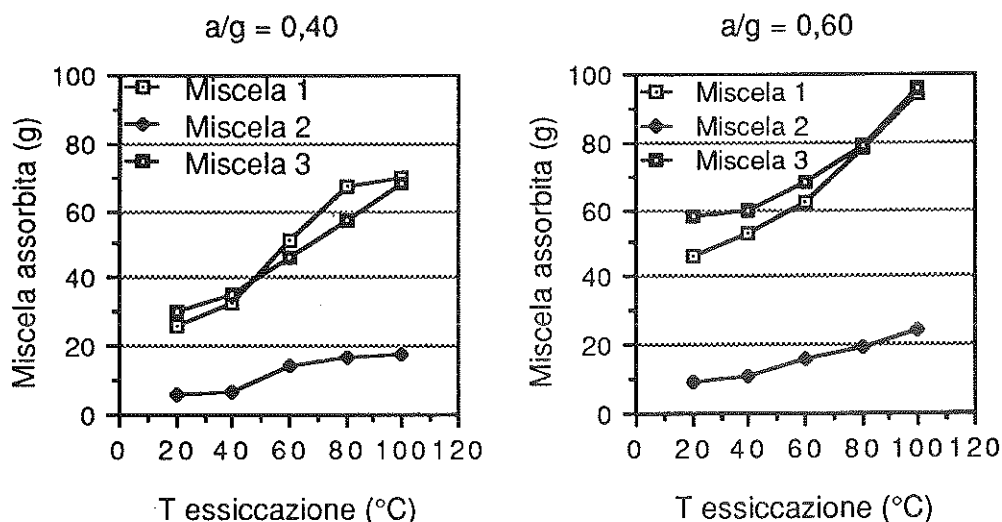


Figura 1: Quantità di monomero assorbito

Dalle prove precedenti, risulta che il miglior compromesso per quanto attiene l'azione dissolvante dell'acqua e l'incremento di resistenze meccaniche è offerto dai provini impregnati con il liquido 3. Con tale impregnante è stato pertanto trattato il manufatto - panchina - destinato alla verifica del comportamento sul campo.

Lo stato delle panchine dopo 2 anni di esposizione è mostrato dalle foto riportate in figura 5. Si osserva il perfetto stato di conservazione della panchina trattata, mentre quella non trattata mostra evidenti segni di degrado, così come appare dall'affiorare delle fibre di vetro.

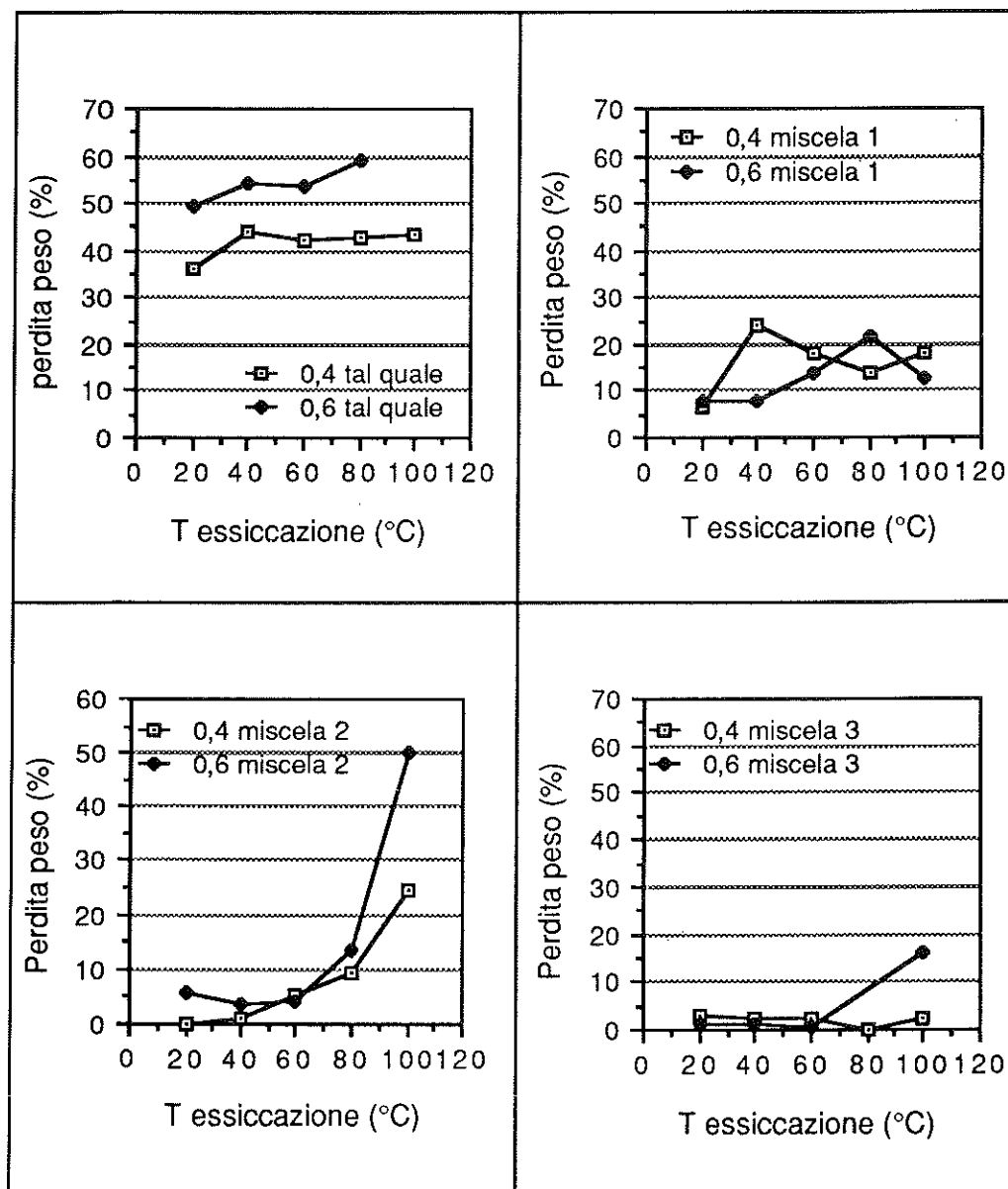


Figura 2: Perdita di peso: indice della non durabilità all'acqua

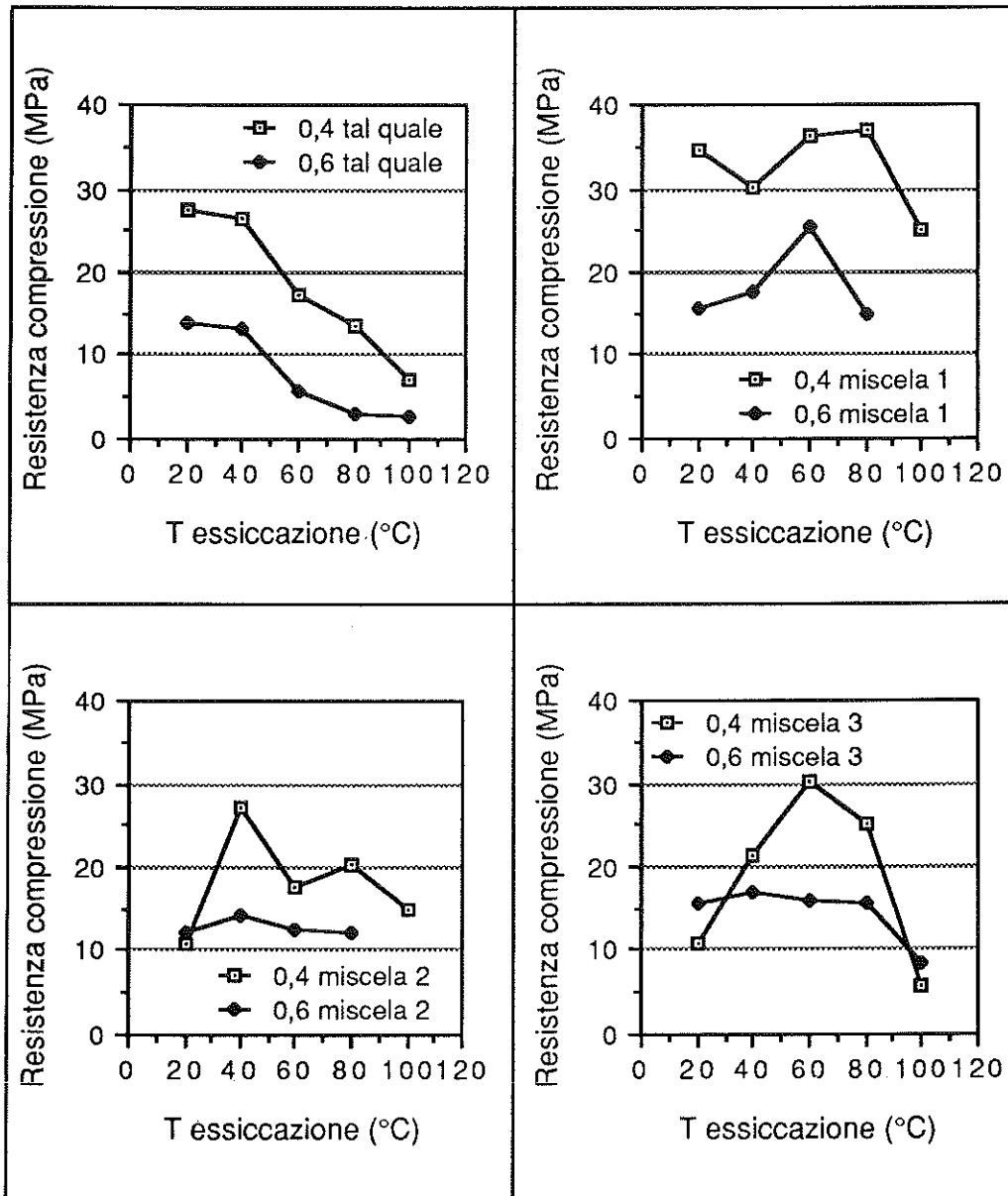


Figura 3: Resistenza a compressione

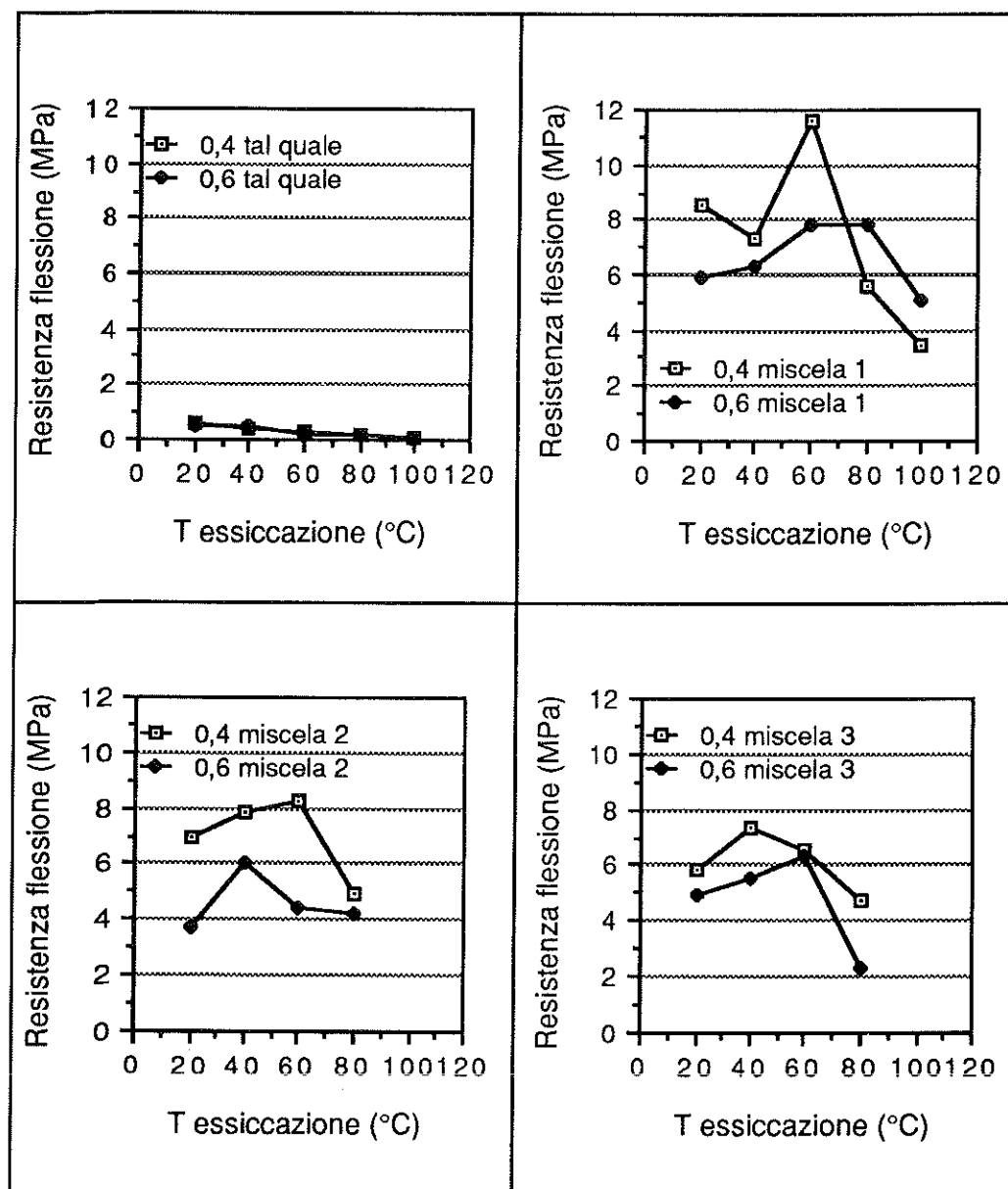


Figura 4: Resistenza a flessione



a)



b)

Figura 5: Panchine dopo l'attacco ambientale.
a) panchina trattata ; b) panchina non trattata

5 - CONCLUSIONI

Dal complesso dei risultati si evince che:

- Il rapporto acqua/gesso influisce sulla resistenza all'azione solvente dell'acqua, sia nel caso dei provini impregnati che non impregnati.
- La temperatura di essiccazione é ininfluente nei confronti della resistenza all'azione solvente dell'acqua.
- Le resistenze meccaniche dei provini essiccati e non impregnati decrescono all'aumentare della temperatura di essiccazione. La successiva impregnazione conferisce un incremento di resistenza tale da riportare la resistenza a valori maggiori o uguali a quelli dei provini di riferimento.
- La migliore resistenza all'azione solvente dell'acqua é assicurata dall'impregnazione con il liquido isobutiltrimetossisilano .

In definitiva, dai risultati su riportati emerge la possibilità del legante gesso ad essere impiegato anche in ambienti umidi ed all'aperto se opportunamente protetto da una idonea impregnazione. Tale impregnazione conferisce anche maggiore resistenza meccanica al manufatto.

6 - RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. Pearce-Whittaker J. and Jacobsen P.H.; (1978). *Journal of Materials Science* Vol. 13, Letters.
2. Wu Han and Brooman Eric W.; (1993). *Cement and Concrete Research*. Vol. 23, p 640.
3. Sersale R, Frigione G., Bonavita L.; (1999). Atti II Convegno Materiali e Tecniche per il Restauro. Cassino (Fr), p 165.
4. Sersale.R, Frigione G., Bonavita L.; (1999). Second International Conference on Alkaline Cements and Concretes. Ukraina.
5. Frigione G., Bonavita L.; (1999) *Rend. Acc. Scienze Fisiche Matematiche in Napoli*, Serie IV Vol. LXVI - Anno CXXXVIII, p 7.

Lavoro parzialmente finanziato dalla Regione Calabria (POP 94/99)

La reazione alcali-silice e l'attacco solfatico interno: due ulteriori cause di degrado chimico del calcestruzzo di cemento

Nota di Riccardo Sersale

(Adunanza del 9 novembre 2001)

Riassunto. Vengono prese in esame due cause di deterioramento di strutture in calcestruzzo di cemento, imputabili al decorso della reazione alcali-silice, od a quella di formazione di ettringite ritardata o secondaria. Si segnalano i principali fattori responsabili del degrado per effetto del decorso di ciascuna delle due reazioni, si indicano le questioni che ancora attendono chiarificazione e si specificano i rimedi più idonei a contrastare tale degrado e promuovere la durabilità delle strutture.

Summary. Two deterioration causes concerning cement concrete works, attributable to alkali-silica reaction, or to secondary ettringite formation, are examined. The main factors responsible for degradation, owing to the course of each phenomenon, are emphasized and questions still waiting for final explanation are reported, together with possible cares for minimizing the risk of damage and promote works durability.

Parole chiave. Calcestruzzo di cemento, alcali-reazione, ettringite secondaria.

Key words. Cement concrete, alkali-silica reaction, secondary ettringite.

Il degrado chimico del calcestruzzo di cemento costituisce una delle tematiche che più hanno richiamato l'attenzione degli studiosi nel secolo or ora declinato.

Un calcestruzzo correttamente progettato, con giusto rapporto acqua/cemento, compattato a dovere, con copriferro di adeguato spessore, convenientemente stagionato, esibisce, di norma, ottimo comportamento in opera. Gli insuccessi che talvolta si registrano sono, il più sovente, addebitabili ad errori di progettazione e di posa in opera.

Uno studio effettuato in Francia (1) attribuisce infatti le cause di degrado per il 43% ad errori di progettazione, per un altro 43% ad errori nelle modalità costruttive, per il 6% all'impiego di materiali incompatibili e per l'8% ad inadeguati interventi di manutenzione.

Nonostante la relativa stabilità del calcestruzzo di cemento, rispetto ad un altro materiale da costruzione di larga diffusione: l'acciaio, si possono tuttavia verificare, a carico del primo fenomeni di interazione fra pasta di cemento e costituenti della miscela, interazioni responsabili di ammorbidimento delle strutture.

Benchè le cause di degrado più ricorrenti siano imputabili alla penetrazione dei cloruri, con conseguente corrosione delle armature, così come ad uno spessore troppo esiguo del copriferro, possono verificarsi anche situazioni non meno dannose. Fra queste: le possibili interazioni fra componenti reattivi verso gli alcali (silice amorfa o quarzo mal cristallizzato che talvolta contaminano gli aggregati per calcestruzzo), od il possibile, lento rilascio di solfato da parte di aggregati impuri per gesso od anche da fasi contenenti ioni SO_4 , fenomeno che, in un calcestruzzo ormai indurito, provoca un'espansione localizzata (formazione di ettringite ritardata).

In considerazione dell'importanza che le due distinte cause di degrado rivestono ai fini della durabilità delle strutture in calcestruzzo di cemento, questa Nota si propone di stabilire i termini a cui si è giunti con le più recenti ricerche.

ALCALI-REAZIONE.

Possono decorrere le reazioni: alcali-silice, alcali-carbonato, alcali-silicato.

La prima, pur se non ancora completamente chiarita in tutti i suoi aspetti, è ritenuta la più comune e più temibile, sia per danno alle strutture, sia per ampiezza del fenomeno. Può infatti indurre l'espulsione degli elementi lapidei che costituiscono la superficie del manufatto (pop-

out) e la **fessurazione** diffusa dell'intera struttura, particolarmente nei calcestruzzi esposti ad ambienti **caldi** ed umidi.

Le **condizioni** ambientali possono infatti influenzare il fenomeno, particolarmente nei calcestruzzi porosi, consentendo l'ingresso dell'umidità necessaria al manifestarsi del fenomeno espansivo.

La **probabilità** di danno, che può dipendere da vari fattori, è segnatamente favorita da un'alta concentrazione di cationi alcalini nella soluzione dei pori della pasta, che può, a sua volta, esser determinata da un alto dosaggio di cemento (2).

I tre fattori indispensabili al decorso della reazione alcali-silice sono dunque: tenore di alcali in quantità **sufficiente** ad innescare e sostenere la reazione, impiego di aggregati reattivi verso gli alcali, **umidità** sufficiente. Al pari della reazione che determina la formazione di ettringite, anche quella **alcali-aggregato** è strettamente legata all'adsorbimento d'acqua (3).

Per **quanto** concerne il contenuto di alcali del cemento, di norma esso può scendere al di sotto del 0.4% $\text{Na}_2\text{O} + \text{K}_2\text{O}$, così come salire al di sopra del 1%. Tale contenuto è andato però aumentando negli ultimi anni, a seguito della necessità di riciclare i fumi nei forni, per motivi di carattere **ecologico**. Una parte degli alcali veniva infatti trascinata via dai fumi. Allo stesso aumento **ha** contribuito la crisi energetica, imponendo l'abbandono del processo ad umido.

E' **generalmente** accettato, anche se non mancano eccezioni, che un cemento a basso tenore di alcali, **cioè** con un tenore massimo di 0.6% Na_2O equivalente (contenuto percentuale di Na_2O , più 0.658 volte il contenuto percentuale di K_2O) causi, di regola, modesta e tollerabile espansione con aggregati reattivi.

La **reazione** si incominciò a studiare intorno al 1940 (4) e la principale causa della **fessurazione** di alcune strutture realizzate parecchi anni prima in California, fu attribuita all'interazione fra gli alcali del cemento e l'aggregato impiegato. Più tardi si accertò che era stato impiegato un cemento ad alto tenore di alcali ed un tipo di aggregato contaminato da opale, la forma **strutturalmente** più disordinata e reattiva della silice.

In **seguito** il fenomeno è stato riscontrato in parecchi altri Paesi e via via sempre più studiato, anche se **non** mancano casi in cui gli insuccessi determinati da tutt'altre cause, sono stati attribuiti **al** decorso di tale reazione.

Recentemente il fenomeno è stato segnalato come promotore del degrado di alcune **pavimentazioni** realizzate nel Minnesota (5), dopo una vita in servizio assai più breve di quella prevista.

Anche in Italia si sono riscontrati alcuni casi di degrado, in regioni del versante adriatico (Puglia e Molise).

La **reazione** si manifesta con espansione e fuoruscita di materia gelatinosa, la quale assume aspetto di **efflorescenza**, si irrigidisce e denuncia carattere amorfo, senza comparsa, in un primo momento, **di** fessurazioni visibili ad occhio nudo, le quali compaiono, però, più tardi e si dispongono a reticolo.

E' stato **anche** ipotizzato (6) che le fessure si formino immediatamente, ma si rendano visibili solo più tardi, grazie all'aumento di ampiezza.

Si tratta **di** una reazione che decorre fra ioni ossidrilici presenti nella soluzione dei pori della pasta di **cemento** e quelle formate di silice reattiva che talvolta contaminano gli aggregati per calcestruzzo. Non è affatto una reazione fra ioni sodio e potassio e silice reattiva, bensì una reazione che si svolge attraverso un processo d'idrolisi della silice reattiva, promosso dagli ioni ossidrilici, con formazione di un gelo alcali-silice, che, in uno stadio successivo, adsorbe acqua ed aumenta **di** volume. L'idratazione del cemento comporta infatti la formazione nei pori della pasta di una soluzione contenente ioni Na^+ , K^+ , Ca^{++} ed OH^- .

La loro **concentrazione** dipende dal contenuto di sodio e potassio del clinker, od anche dall'esposizione ai sali alcalini provenienti dall'ambiente (acqua di mare, sali disgelanti, ecc.) (7).

La **presenza** di alcali, promuovendo un'elevata concentrazione di ioni ossidrilici nella fase acquosa che **riempie** i pori della pasta di cemento, crea le condizioni favorevoli al decorso della reazione. Un'alta concentrazione di tali ioni, qualora si impieghi un cemento ad alto tenore di alcali, **promuove** quindi l'attacco della silice reattiva.

Parecchie memorie hanno descritto in dettaglio il possibile meccanismo della reazione. Semplici calcoli consentono di verificare che la presenza di alcali nella pasta di cemento può provocare un aumento di pH fino a 13.5-13.9. Nella soluzione acquosa dei pori della pasta di un cemento ad alto tenore di alcali si può raggiungere una concentrazione di ioni ossidrilici anche dieci volte maggiore di quella presente nella soluzione dei pori di una pasta di un cemento a basso tenore di alcali.

Per interpretare il meccanismo di espansione, si è supposto che le tensioni indotte all'interno del calcestruzzo debbano ascrivere alla crescita del gelo per effetto dell'adsorbimento d'acqua dalla soluzione dei pori della pasta di cemento (8).

E' stato pure ipotizzato che l'espansione sia associata allo sviluppo di una pressione osmotica, generata dal silicato alcalino, neoformato per reazione fra silice ed alcali e confinato entro una membrana semipermeabile della pasta di cemento (9).

Secondo la prima interpretazione, l'espansione dipenderebbe dal volume del gelo, dalla sua velocità d'accrescimento e proprietà fisiche. Se la velocità d'accrescimento è lenta, le tensioni interne hanno modo di rilassarsi, a seguito di migrazione del gelo nell'intero corpo della struttura. In caso di velocità d'accrescimento rapida, le tensioni interne non possono che provocare espansione e fessurazione.

Secondo l'altra ipotesi, la pasta di cemento si comporterebbe come membrana impermeabile agli ioni silicato. Essa consentirebbe la sola diffusione dell'acqua, degli ioni dei metalli alcalini e di quelli ossidrilici, ma non di quelli del silicato. In tali condizioni, in ogni zona dove si compie la reazione fra silice ed alcali, si svilupperebbe una pressione crescente contro la pasta di cemento. La diffusione della soluzione dei pori attraverso la membrana, accelererebbe, poi, la reazione.

Questa interpretazione del meccanismo d'espansione è stata però criticata (8) in base alla considerazione che la pasta di cemento non sembrerebbe idonea a svolgere la funzione di membrana semipermeabile, sia per l'estensione della fessurazione e la distribuzione delle fessure, sia perchè esse, partendo dagli elementi lapidei contaminati da silice reattiva, non vengono colmate dalla pasta.

E' stata inoltre ipotizzata un'analogia con il meccanismo che presiede all'alterazione delle rocce in natura (10). Lo sviluppo della reazione alcali-aggregato richiede che un film liquido risulti confinato attorno agli elementi lapidei che costituiscono l'aggregato utilizzato, dando origine ad un fenomeno d'idrolisi. Benchè la natura dei prodotti di neoformazione vari in funzione del pH e della temperatura, il meccanismo di reazione sembra identico a quello che, in natura, governa l'alterazione delle rocce.

Per valutare il rischio potenziale di alcali-reazione, sono state sviluppate una pluralità di metodologie e si è registrata una vera e propria proliferazione di metodi di prova, sotto la spinta della considerazione che l'interazione alcali-aggregato interessa, in differente misura, diversi tipi di roccia, coinvolgendo, ad un tempo, il profilo geologico della regione. Alla suddetta proliferazione ha concorso anche il proponimento di ridurre i lunghi tempi che talune prove richiedono.

Nessuna delle diverse metodologie è, tutt'oggi, universalmente accettata.

Una delle prime prove messa a punto per rilevare la reattività degli aggregati per calcestruzzo, è stata quella di espansione su barre di malta, sviluppata negli anni '40 da Stenton (4) in California ed adottata dall'American Society for Testing and Materials negli anni '50 (11).

Essa consiste nella preparazione di una malta con l'aggregato sospetto, fratturato, e con un cemento che contenga almeno 0.6% di Na_2O eq. Le barre vengono stagionate in ambiente umido a 38°C per un anno o più, misurando, a scadenze prefissate, le variazioni di lunghezza. Può convenire il paragone con un provino di riferimento. L'aggregato viene ritenuto potenzialmente a rischio se l'espansione supera 0.10% a sei mesi e 0.05% a tre.

Il lungo tempo richiesto dalla prova ed il fatto che, nel corso di un tempo tanto lungo, possa verificarsi una lisciviazione degli alcali, hanno consigliato negli anni '80, una possibile accelerazione della prova. Sono stati così messi a punto molti metodi che si differenziano l'un l'altro per l'artificio messo in pratica (12).

I principali espedienti cui si è fatto ricorso sono stati:

l'innalzamento della temperatura di reazione e l'incremento del tenore di alcali del cemento.

Per abbattere l'espansione si è fatto poi ricorso: a prodotti di parziale rimpiazzo del clinker (ceneri volanti, fly ashes, scorie d'alto forno granulate, fumo di silice).

E' noto che le prove accelerate non sono prive di inconvenienti, poichè la severità alla quale si uniformano non sempre si determina nella pratica.

Recentemente la RILEM ha nominato una Commissione ad hoc, composta da cinquanta studiosi di tutti i Continenti, ed ha sviluppato, a partire dal 1988, una metodologia ad uso internazionale, che prevede:

- un metodo di esame petrografico, come via d'identificazione di costituenti potenzialmente reattivi verso gli alcali (13);
- una prova ultra-accelerata su barre di malta (14);
- una prova su prismi di calcestruzzo (15).

Principio del metodo ultra-accelerato è l'immersione della barra di malta, confezionata con l'aggregato sospetto, in una soluzione molare di idrossido di sodio ad 80°C, monitorando l'espansione per 14 giorni.

Principio della prova su prismi di calcestruzzo, è la stagionatura a 38°C e 100% di U.R., con monitoraggio dell'espansione per un anno.

I limiti d'espansione non ancora sono stati compiutamente fissati e variano da 0.04 a 0.1% ad un anno.

Il limite di 0.02% imposto da alcune Normative (16), è ritenuto eccessivamente restrittivo.

Il paragone con un provino di riferimento non è imperativo, ma fortemente raccomandato dalla RILEM.

Con riferimento a misure preventive, in aggiunta alla scelta di un cemento a moderato contenuto di Na_2O eq., viene consigliato il ricorso a prodotti di rimpiazzo del clinker.

Ceneri volanti di classe F, scorie d'alto forno, fumo di silice, vere pozzolane, zeolititi (17), metacaolino, inibiscono, infatti, od almeno minimizzano, l'espansione di barre di malta confezionate con aggregati reattivi. Il loro effetto è principalmente funzione del contenuto di alcali del sistema, del tipo di aggiunta minerale, del livello di sostituzione.

Impiegando ceneri volanti (18) è stato posto in luce che, per un determinato livello di sostituzione del Portland, l'espansione cresce con il contenuto di calcio o di alcali delle ceneri e con la diminuzione del loro contenuto di silice. Gran parte delle variazioni riscontrate sul comportamento delle ceneri, può spiegarsi sulla base della composizione della soluzione dei pori.

Ceneri che riducono l'alcalinità della soluzione dei pori, risultano efficaci nel controllare l'espansione.

Con metacaolino ad alta reattività (19), il livello di sostituzione del Portland, richiesto per contenere l'espansione di calcestruzzi o di malte a valori al di sotto del 0.04% a due anni, si aggira fra il 10 ed il 15%, in funzione della reattività dell'aggregato.

Ben correlabile con la riduzione dell'espansione, sia dei prismi di calcestruzzo, che delle barre di malta, si è rivelata la significativa riduzione della concentrazione di ioni ossidrilici e di ioni sodio e potassio nella soluzione estratta dai pori della pasta di cemento. Pertanto, il meccanismo con cui metacaolino e le altre aggiunte attive riducono il fenomeno espansivo, è ragionevolmente riconducibile ad un intrappolamento di alcali negli idrati neoformati a spese dei prodotti di sostituzione e nel conseguente decremento del pH della soluzione dei pori della pasta di cemento. Gli idrossidi alcalini possono infatti esser incorporati all'interno degli strati della fase C-S-H, a seguito, principalmente, della neutralizzazione dei gruppi SiOH (20).

Ai fini della riduzione del rischio di ammaloramento delle strutture cementizie per effetto della reazione alcali-aggregato, è dunque consigliabile:

- impiegare cementi a contenuto di alcali non eccessivamente elevato;
- valutare la reattività potenziale dell'aggregato prescelto con i metodi indicati;
- realizzare un conglomerato di massima compattezza, regolando appropriatamente il rapporto acqua/cemento, poichè esso costituisce uno dei fattori che controllano la permeabilità ed altre proprietà di trasporto;

- far uso di prodotti cementizi supplementari (21), in considerazione dell'effetto favorevole sul contenimento dell'espansione;
- ricorrere all'impiego di additivi che contrastano la temuta reazione (idrossido o sali di litio, borati di vari cationi, ecc.) (22).

ATTACCO SOLFATICO.

In una pasta di cemento in via d'idratazione, od anche già indurita, il solfato, reagendo con l'alluminato tricalcico di costituzione del clinker, neoforma un solfoalluminato idrato, espansivo ($3\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{CaSO}_4 \cdot 32\text{H}_2\text{O}$), l'ettringite.

Se detta reazione si compie nella fase iniziale dell'idratazione, quando l'impasto è ancora deformabile, il sistema assorbe perfettamente la variazione di volume e non si determina deterioramento di sorta della struttura (formazione di ettringite immediata o primaria).

Al contrario, se la reazione avviene a carico di un conglomerato ormai indurito, che già ha assunto la forma impartitagli, l'espansione produce fessurazione ed espulsione di materia in superficie (formazione di ettringite ritardata o secondaria).

Quest'ultima reazione può compiersi sia a seguito di un attacco solfatico esterno (solfato ceduto dall'ambiente), sia interno (rilascio di solfato da costituenti dell'impasto).

Fra le fonti interne, il tenore di solfato del clinker di cemento Portland è verosimilmente da escludere (23), poiché clinkers con alti livelli di solfato, con i moderni impianti di produzione e con i metodi di controllo di qualità, sono ormai rari. Con un rapporto molare solfato/alcali pari all'unità, od anche maggiore, i solfati sono poi contenuti nel clinker come fasi contenenti alcali, altamente solubili. Possono anche esser presenti come sostituenti nelle fasi principali, specialmente alite e belite. Perfino l'anidrite, che raramente è presente nei clinkers, passa velocemente in soluzione (24).

In calcestruzzi odierni, non stagionati a temperatura, la possibilità che si determini danno per formazione di ettringite ritardata, addebitabile al contenuto totale di SO_3 del clinker, od alla sua distribuzione nelle fasi di costituzione, non sembra avvalorata da risultati sperimentali (25).

In ambiente privo di solfati, le più probabili fonti interne risultano pertanto: l'eventuale ritardato rilascio di solfati da parte di fasi che ne sono ricche (anche ioni solfato adsorbiti dal gelo C-S-H durante il decorso della stagionatura), oppure da parte di aggregati contaminati da gesso.

Molte ricerche sono di recente state condotte sul degrado attribuibile a formazione di ettringite in strutture di calcestruzzo precompresso, che vengono a trovarsi in ambienti privi di solfato.

Frequentemente si fa infatti uso di elementi in calcestruzzo precompresso, la cui produzione avviene secondo un processo continuo, che, al fine di ridurre i tempi di stagionatura, impiega processi a vapore. Il loro degrado è stato attribuito alla formazione di ettringite ritardata e la causa della sua formazione individuata negli effetti della temperatura, nella durata della stagionatura, nella composizione del cemento.

Il meccanismo di formazione di ettringite ritardata non ancora è stato compiutamente chiarito, anche se la causa determinante della formazione è stata attribuita alla temperatura di stagionatura eccessivamente alta degli elementi in precompresso (26). Essa comporta la decomposizione dell'ettringite primaria, quella, cioè, neoformata nel corso dell'idratazione iniziale, la quale, però, può formarsi di bel nuovo se il calcestruzzo viene a trovarsi in ambiente sufficientemente umido, con conseguente insorgere di forze espansive che creano fessurazione.

La stabilità dei prodotti solfoalluminato dipende dalla temperatura di stagionatura.

Sulla temperatura critica alla quale l'ettringite primaria si decompone, si registrano tuttora differenze di opinione, anche se nessuno dubita che al crescere della temperatura di stagionatura cresce anche il pericolo di formazione di ettringite secondaria.

A temperatura inferiore a 70°C l'ettringite dovrebbe esser stabile e pertanto la formazione di quella ritardata bassa. Fra 70 e 90°C , l'ettringite viene parzialmente o completamente distrutta ed a 100°C la formazione di quella ritardata risulta favorita (27).

Anche il monosolfato ($3\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{CaSO}_4 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$) è parzialmente o completamente distrutto.

Prove espletate su di un limitato numero di campioni di cemento, indicano alcuni fattori che sembrano influenzare la tendenza all'espansione dei calcestruzzi sottoposti a stagionatura a temperatura elevata (28). Essi sono: il contenuto di alcali, di SO_3 , di alluminato tricalcico, la finezza, anche se non si è riscontrato un puntuale collegamento fra tali fattori e l'entità di espansione, in base al quale effettuare una scelta dei cementi commerciali.

Risultati sperimentali (29) fanno ritenere che il deterioramento in opera di calcestruzzi stagionati a vapore, non potrebbe esser determinato da sola formazione di ettringite ritardata, senza concorso di altri fattori, quali, ad esempio: espansione per alcali-reazione, fessurazioni da gelo/disgelo, microdifetti strutturali. A sostenere ciò sta il fatto che l'espansione per ettringite ritardata si manifesta molto meno rapidamente nelle paste di cemento. Esse sono prive di difetti all'interfaccia pasta/aggregato, rispetto a malte e calcestruzzi.

Altre ricerche (29) eseguite su di un malta di cemento stagionata a 100°C per 12 ore e successivamente immersa in acqua a temperatura ambiente, hanno posto in luce, dopo una durata di tempo di oltre un anno, la formazione di ettringite in bande che si estendono ed allargano le fessure, giustificando l'espansione osservata. Tali bande di ettringite, la cui formazione è favorita dagli ioni solfato confluiti nella soluzione dei pori per effetto della temperatura, non risultano frammiste al gelo di C-S-H, come nel caso di malte stagionate a temperatura ambiente, a causa della tessitura più compatta, stabilitasi nel corso della stagionatura a caldo.

Tutti i fattori che promuovono l'insorgere di difetti e di irregolarità microstrutturali, possono promuovere la formazione di ettringite ritardata nel calcestruzzo indurito. Pertanto essa potrebbe riscontrarsi anche in calcestruzzi in opera che non sono stati sottoposti a stagionatura a temperatura.

In presenza di fonti interne di solfato e di umidità sufficiente, microdifetti della struttura promuovono la formazione di ettringite sotto l'azione del trasporto di materia e causano l'allargamento delle fessure.

Una diminuzione del pH, dovuta a lisciviazione di alcali o ad altre ragioni, costituisce poi elemento fondamentale per la ricristallizzazione di ettringite (24).

Non può però esser taciuto che spesso la presenza di ettringite riscontrata nei calcestruzzi, non è coinvolta nel meccanismo che provoca il danno, ma solo la conseguenza di irregolarità microstrutturali imputabili a cause diverse.

Ricerche di laboratorio sono recentemente state eseguite sulla formazione di ettringite ritardata (30), impiegando sottili barre di malta, trattate a temperatura e successivamente immerse in acqua. Le ricerche hanno posto in luce che, in queste condizioni, si determina una rapida diffusione di idrossido alcalino nell'acqua, con conseguente riduzione della concentrazione di alcali nella soluzione dei pori della pasta di cemento. Il suddetto dilavamento costituirebbe l'innescò del processo di formazione di ettringite ritardata. Se l'immersione avviene in soluzione d'idrossido di sodio, in luogo che in acqua, l'espansione per ettringite ritardata viene rimandata od addirittura impedita.

Altri risultati (31) hanno rivelato che cubi di malta di cm.51, in ambiente umido, si comportano in maniera differente dalle barre, più soggette al dilavamento. La medesima malta che, su barre, ha mostrato notevole formazione di ettringite ritardata, se stagionata in cubi, è rimasta pressoché priva di indizi di ettringite ritardata, perfino dopo 900 giorni.

Non può però esser taciuto che anche in elementi di calcestruzzo di un certo spessore, per i quali la possibilità di dilavamento è meno probabile, si rinviene talvolta ettringite ritardata.

E' ragionevole supporre che, in questi casi, la riduzione di concentrazione interna dell'idrossido alcalino, sia attribuibile al decorso della reazione alcali-silice, la quale si sostituirebbe all'effetto del dilavamento.

E' pertanto verosimile che, senza una significativa riduzione della concentrazione di idrossido alcalino, dovuta a dilavamento od al decorso della reazione alcali-silice, la formazione di ettringite ritardata rimanga latente.

La formazione di ettringite ritardata risulta strettamente connessa al trasporto della soluzione dei pori nel corpo del calcestruzzo.

E' stato posto in luce (32) che la presenza di cationi sodio favorisce la formazione di fasi AFm ($3\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{CaSO}_4 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$), a spese di quella di fasi Aft

($3\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{CaSO}_4 \cdot 32\text{H}_2\text{O}$). L'innalzamento della temperatura incrementa la formazione di fasi AFm. I livelli di solfato che permettono la formazione di ettringite, inibiscono quella di fasi AFm.

Il risultato appare di particolare importanza per calcestruzzi prefabbricati, stagionati a vapore. Se, nel corso della stagionatura, la formazione di fasi AFt è impedita da quella di fasi AFm, le variazioni termiche, e/o la migrazione di specie cationiche, potrebbero dare origine ad ettringite ritardata e, conseguentemente, a modificazioni volumetriche della struttura, a seguito della decomposizione di fasi AFm.

In ambienti privi di solfato, cicli di bagnatura ed asciugatura, di gelo/disgelo come già detto, il decorso della reazione alcali-silice, costituiscono altrettanti fattori favorevoli a giustificare l'instabilità volumetrica dei calcestruzzi (33).

Resta, però, tuttora il dilemma: la cristallizzazione di ettringite è la causa principale del danno, od invece essa compare quando il danno già si è manifestato?

Indagini espletate su campioni di un prefabbricato in calcestruzzo leggero, stagionato a vapore, che hanno denunciato presenza di cristalli di ettringite frammisti a materia geliforme, hanno suggerito l'ipotesi (34) che espansione e fessurazione siano causate da rigonfiamento del gelo a seguito di fissazione di acqua, secondo un processo osmotico. I cristalli fibrosi di ettringite che riempiono le cretture della struttura, non avrebbero forza sufficiente a causare la fessurazione e l'espulsione di materia osservate.

Dall'ampia bibliografia si può pertanto rilevare che (35):

- il trattamento dei conglomerati a temperatura superiore a circa 70°C può determinare formazione di ettringite ritardata;
- non esistono prove sufficienti a favore di formazione di ettringite ritardata, per effetto di lento rilascio di solfato da parte del clinker, in calcestruzzi non sottoposti a temperatura;
- il fenomeno espansivo è generato dalla formazione nella pasta di cristalli di ettringite di dimensioni ridottissime. Quelli più grossi, osservati talvolta nelle crepe e nei vuoti, sarebbero prodotti di ricristallizzazione;
- velocità ed entità finale del fenomeno sono principalmente influenzate: dalla composizione chimica del sistema, dalla quale dipende la quantità di ettringite neoformabile; dalla microstruttura della pasta, malta o calcestruzzo, che assorbe - in varia misura - le tensioni indotte dalla neoformazione;
- nel corso del trattamento a temperatura, la presenza di alcali può incrementare il fenomeno. Una presenza di alcali successiva, impedisce invece la formazione di ettringite e la conseguente espansione;
- al contrario, la lisciviazione promuove il fenomeno.

La formazione di ettringite ritardata può esser minimizzata mediante addizione all'impasto di aggiunte attive (pozzolane, fumo di silice, cencri volanti, scorie d'alto forno, zeolititi).

La formazione di una quantità maggiore di silicato idrato (C-S-H) comporta un consumo maggiore di $\text{Ca}(\text{OH})_2$ e, al tempo stesso, concorre ad occupare gli spazi vuoti, generando un calcestruzzo a microstruttura più compatta, specie in prossimità degli elementi lapidei.

Ciò elimina, od almeno attenua, una delle condizioni promotrici del danno, poichè ostacola, in ambiente umido, il trasporto di materia all'interno del conglomerato. Come già sottolineato, la formazione di ettringite ritardata è infatti strettamente collegata al trasporto della soluzione dei pori della pasta di cemento.

BIBLIOGRAFIA

- (1) Paterson A.C. The structural engineer in context. *Struct. Engr.* 62A, 335-342 (1984).
- (2) Diamond S. A review of alkali-silica reaction and expansive mechanism. 1 Alkalies in cements and in concrete pore solution. *Cement Concr. Res.*, 5, 4, 329-346 (1975).
- (3) Mehta P.K. A discussion on the paper "Alkali-aggregate reaction in Nova Scotia" by Gillot J.E., Duncan M.A.G., Swenson E.G. *Cement Concr. Res.*, 4, 2, 335-343 (1974).
- (4) Stanton D.E. The expansion of concrete through reaction between cement and aggregate. *Proc. Am. Soc. Civ. Engrs.* 66, 1781-1811 (1940). *Proc. Am. Soc. Test. Mater.* 43, 199 (1943); 48, 1055 (1948).
- (5) Whiting N.M. Comparison of field observations with laboratory test results on concrete undergoing alkali-silica reaction. *Cement Concr. Aggreg.* 21, 2, 142-146 (1999).
- (6) Vivian H.E. Studies in cement-aggregate reaction. X. The effect on mortar expansion of amount of reactive component in the aggregate. *CSIRO Bull.* 256, 13-20 Melbourne (1950).
- (7) Collepardi M. Durabilità del calcestruzzo. *Ind. Ital. Cem.*, 70, 5, 432-441 (2000).
- (8) Vivian H.E. Studies in cement-aggregate reaction. XV. The reaction product of alkalis and opal. *CSIRO Bull.* 259, 60-82. Melbourne (1950).
- (9) Hansen W.C. Studies relating to the mechanism by which alkali-aggregate reaction produces expansion in concrete. *Journ. Am. Concr. Inst. Proc.*, 40, 3, 213-227 (1944).
- (10) Prince W., Castanier G., Giafferi J.L. Similarity between alkali-aggregate reaction and the natural alteration of the rocks. *Cement Concr. Res.*, 31, 2, 271-276 (2001).
- (11) Rogers C.A. Multi-laboratory study on the accelerated mortar bar test (ASTM C 1260) for alkali-silica reaction. *Cement Concr. Aggreg.*, 21, 2, 185-194 (1999).
- (12) Lane D.S. Comparison of results from C 441 and C 1293 with implications for establishing criteria for ASR-resistant concrete. *Cement Concr. Aggreg.*, 21, 2, 149-156 (1999).
- (13) RILEM TC 106-AAR. Aggregates for alkali-aggregate reaction. International assessment of aggregates for alkali-aggregate reactivity. *Materials Struct.* 33, 88-93 (2000).
- (14) RILEM A-TC 106-2. Detection of potential alkali-reactivity of aggregates. The ultra-accelerated mortar bar test. *Materials Struct.*, 33, 283-289 (2000).
- (15) RILEM B-TC 106-3. Detection of potential alkali-reactivity of aggregates. Method for aggregate combination using concrete prisms. *Materials Struct.*, 33, 290-293 (2000).
- (16) Lane D.S., Ozyildirim H.C. Evaluation of effect of Portland cement alkali content, fly ash, ground slag, and silica fume on alkali-reactivity. *Cement Concr. Aggreg.*, 21, 2, 129-140 (1999).
- (17) Sersale R. Zeolite tuff as a pozzolanic addition in the manufacture of blended cements. *Natural Zeolites '93. Occurrence, Properties, Use.* Ming D.W., Mumpton F.A. Eds. Int. Committee on Natural Zeolites, Brockport, N.Y. 603-612 (1995).
- (18) Shehata M.H., Thomas M.D.A. The effect of fly ash composition on the expansion of concrete due to alkali-silica reaction. *Cement Concr. Res.*, 30, 7, 1063-1072 (2000).
- (19) Ramlochan T., Thomas M., Gruber K.A. The effect of metakaolin on alkali-silica reaction in concrete. *Cement Concr. Res.*, 30, 3, 339-344 (2000).
- (20) Stade H. On the reaction of C-S-H (di,poly-) with alkali hydroxides. *Cement Concr. Res.*, 19, 5, 802-810 (1989).
- (21) Fournier B; Malhotra V.M. Evaluation of laboratory test methods for alkali-silica reactivity. *Cement Concr. Aggreg.*, 21, 2, 173-184 (1999).
- (22) Stark D., Morgan B., Okamoto P., Diamond S. Eliminating or minimizing alkali-silica reactivity. Strategic Highway Research Program SHRCP-343. Washington (1993). Ramachandran V. S. Alkali-aggregate expansion inhibiting admixtures. *Cement Concr. Composites*, 20, 149-161 (1998).
- (23) Tennis P.D., Bhattacharja S., Klemm W.A., Miller F.M. Assessing the distribution of sulfate in Portland cement and clinker and its influence on expansion in mortars. *Cement Concr. Aggreg.*, 21, 2, 212-216 (1999).
- (24) Stark J., Bollmann K. Späte Ettringitbildung im Beton. Teil 2. *Zement-Kalk-Gips Int.*, 53, 5, 298-308 (2000).

- (25) Taylor H.F.W. Distribution of sulfate between phases in Portland cement clinkers. *Cement Concr. Res.*, 29, 8, 1173-1179 (1999).
- (26) McDonald D. Delayed ettringite formation and heat curing. Implications of the work of Kelham. *Cement Concr. Res.*, 28, 12, 1827-1830 (1998).
- (27) Yang R., Lawrence C.D., Lynsdale C.J., Sharp J.H. Reply to the discussion by Grattan-Bellew P.E. on the paper "Delayed ettringite formation in heat-cured Portland cement mortars". *Cement Concr. Res.*, 30, 4, 667-668 (2000).
- (28) Scrivener K.L., Damidot D., Famy C. Possible mechanisms of expansion of concrete exposed to elevated temperature during curing (also known as DEF) and implications for avoidance of field problems. *Cement Concr. Aggreg.*, 21, 1, 93-101 (1999).
- (29) Yang R., Lawrence D.C., Lynsdale C.J., Sharp J.H. Delayed ettringite formation in heat-cured Portland cement mortars. *Cement Concr. Res.*, 29, 1, 17-25 (1999).
- (30) Diamond S. The relevance of laboratory studies on delayed ettringite formation to DEF in field concretes. *Cement Concr. Res.*, 30, 12, 1987-1991 (2000).
- (31) Zhang Z. Delayed ettringite formation in heat-cured cementitious systems. Ph.D thesis Purdue University. December (1999).
- (32) Clark B.A., Brown P.W. The formation of calcium-sulfoaluminate hydrate compounds. 1. *Cement Concr. Res.*, 29, 12, 1943-1948 (1999). 2. *Cement Concr. Res.*, 30, 2, 233-240 (2000).
- (33) Batic O.R., Milanesi C.A., Maiza P.J., Marfil S.A. Secondary ettringite formation in concrete subjected to different curing conditions. *Cement Concr. Res.*, 30, 9, 1407-1412 (2000).
- (34) Ozol M.A., Strand W.III. Delayed ettringite formation at Brewer Stadium, Boone, North Carolina. *Cement Concr. Aggreg.*, 22, 1, 24-34 (2000).
- (35) Taylor H.F.W., Famy C., Scrivener K.L. Delayed ettringite formation. *Cement Concr. Res.*, 31, 5, 683-693 (2001).

A note on the Robin problem for the Stokes system

Nota di G. Starita* and A. Tartaglione

Presentata dal Socio Salvatore Rionero
(Adunanza del 9 novembre 2001)

1 The Robin problem for the Stokes system

The slow motion of a viscous fluid is governed by the *Stokes system*¹

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \nabla p && \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

where $\mathbf{u}, p$ are the (unknown) kinetic and hydrostatic pressure fields and Ω is a bounded or an exterior domain² of the euclidean space $\mathcal{E}_n$, $n \geq 2$. The stress tensor associated with a solution $(\mathbf{u}, p)$ to system (1.1) is the second-order tensor field

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, p) = -p\mathbf{1} + 2\hat{\nabla}\mathbf{u},$$

where $\hat{\nabla}$ denotes the symmetric part of the gradient. The direction of the unit normal $\mathbf{n}$ to $\partial\Omega$ is chosen such that $\mathbf{n}$ is outer for bounded domains and inner

* giulio.starita@unina2.it

† alfonsina.tartaglione@unina2.it

¹ Light-face letters different from o, x, y, ξ and η indicate scalars, boldface lower case letters stand for vectors, while x and y denote generic points of $\mathcal{E}_n$, ξ and η points running over a surface of $\mathcal{E}_n$, and o the origin of the reference frame; boldface upper case letters indicate second-order tensors.

² Let Ω_h ($h \in \{0, \dots, m\}$) be $m+1$ domains (open connected sets) of $\mathcal{E}_n$ of class $C^{1,\alpha}$ ($\alpha > 0$) with connected boundaries, such that $\overline{\Omega}_h \cap \overline{\Omega}_k \neq \emptyset$ ($h \neq k$) and $\Omega_0 \supset \Omega' = \cup_{h=1}^m \overline{\Omega}_h$, by a bounded domain we mean the region $\Omega = \Omega_0 \setminus \Omega'$ and by an exterior domain we mean the set $\Omega = \mathcal{E}_n \setminus \Omega'$. We stipulate that the origin o of the reference frame we use belongs to some Ω_h ($h \neq 0$).

for exterior domains. The traction field at the boundary corresponding to a solution $(\mathbf{u}, p)$ is the field $\mathbf{T}(\mathbf{u}(\xi), p(\xi))\mathbf{n}(\xi)$, for any $\xi \in \partial\Omega$.

As is well known, the Dirichlet [resp. Neumann] problem associated with system (1.1), which consists in finding a solution to (1.1) such that the kinetic field [resp. the traction field] assumes an assigned value on the boundary $\partial\Omega$, have been the object of several papers and are nowadays well understood (see, e.g., [3], [2], [4], [5], [8]). In the present note we aim at studying another classical boundary value problem associated with system (1.1): the *Robin problem*. It consists in finding a solution to (1.1) such that a linear combination of the kinetic and traction fields assumes a prescribed value on $\partial\Omega$. To be precise, denoting by $\mathbf{A}$ a positive definite second-order symmetric tensor and by $\mathbf{s}$ a continuous vector field on $\partial\Omega$, we look for a solution $(\mathbf{u}, p) \in [C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})] \times C^1(\Omega)$ to system (1.1) which satisfies on $\partial\Omega$ the condition

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{u}, p)\mathbf{n} + \mathbf{A}\mathbf{u} &= \mathbf{s}, & \text{if } \Omega \text{ is bounded,} \\ \mathbf{T}(\mathbf{u}, p)\mathbf{n} - \mathbf{A}\mathbf{u} &= \mathbf{s}, & \text{if } \Omega \text{ is exterior,} \end{aligned}$$

in the sense that, for any $\xi \in \partial\Omega$,

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \mathbf{T}(\mathbf{u}, p)(x)\mathbf{n}(\xi) = \begin{cases} \mathbf{s}(\xi) - \mathbf{A}\mathbf{u}(\xi), & \text{if } \Omega \text{ is bounded,} \\ \mathbf{s}(\xi) + \mathbf{A}\mathbf{u}(\xi), & \text{if } \Omega \text{ is exterior,} \end{cases}$$

where x tends to ξ in Ω . Throughout the paper we shall be concerned with this kind of solutions to problem (1.1), (1.2).

2 The layer potentials

Let

$$f(r) = \begin{cases} -\log r, & n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)r^{n-2}}, & n > 2 \end{cases}$$

($r > 0$). As is well-known, the pair $(\mathbf{U}(x-y), \mathbf{q}(x-y))$, with

$$\omega_n \mathbf{U}(\mathbf{x}) = -f(|\mathbf{x}|)\mathbf{1} - \frac{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^n}, \quad \omega_n \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}),$$

is the fundamental solution to the Stokes system and the pair

$$(2.1) \quad \begin{aligned} v[\psi](x) &= - \int_{\partial\Omega} U(x-\eta) \psi(\eta) d\mathbf{a}, \\ P[\psi](x) &= - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q}(x-\eta) \cdot \psi(\eta) d\mathbf{a}, \end{aligned}$$

is the single layer potential with density $\psi \in L^1(\partial\Omega)$. Also, setting

$$\mathbf{K}(x, \eta) = - \frac{n}{\omega_n} \frac{(x-\eta) \otimes (x-\eta) \otimes (x-\eta)}{|x-\eta|^{n+2}} \mathbf{n}(\eta)$$

the double layer potential with density $\varphi \in L^1(\partial\Omega)$ is the pair

$$(2.2) \quad \begin{aligned} w[\varphi](x) &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{K}(x, \eta) \varphi(\eta) d\mathbf{a}, \\ \varpi[\varphi](x) &= -2 \operatorname{div} \left(\int_{\partial\Omega} \mathbf{q}(x-\eta) \cdot \varphi(\eta) \mathbf{n}(\eta) d\mathbf{a} \right). \end{aligned}$$

The above fields are analytic solutions in $\mathcal{E}_n \setminus \partial\Omega$ to system (1.1).

Set

$$(2.3) \quad \mathcal{L}[\psi](\xi) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{K}(\eta, \xi) \psi(\eta) d\mathbf{a},$$

In the following lemmas we collect some classical properties of fields (2.1), (2.2) we shall need in the sequel. A proof can be found in [6].

Lemma 2.1. *Let $\psi \in L^q(\partial\Omega)$ ($q \geq 1$). Then*

$$\begin{aligned} (i) \quad q < n-1 &\implies v[\psi] \in L^s(\partial\Omega), \quad \forall s \leq \frac{q(n-1)}{n-1-q}, \\ (ii) \quad q > n-1 &\implies v[\psi] \in C^{0,\lambda}(\mathcal{E}_n), \quad \forall \lambda \leq \min\left\{\alpha, 1 - \frac{n-1}{q}\right\}, \\ (iii) \quad q < \frac{n-1}{\alpha} &\implies \mathcal{L}[\psi] \in L^s(\partial\Omega), \quad \forall s \leq \frac{q(n-1)}{n-1-\alpha q}, \\ (iv) \quad q > \frac{n-1}{\alpha} &\implies \mathcal{L}[\psi] \in C^{0,\lambda}(\partial\Omega), \quad \forall \lambda < \alpha - \frac{n-1}{q}. \end{aligned}$$

In (i) and (iii) the equality holds only for $q > 1$.

Properties (iii) and (iv) hold true also for the adjoint operator of $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}^*[\varphi](\xi) = \int_{\partial\Omega} K(\xi, \eta) \varphi(\eta) \, da.$$

Lemma 2.2. *Let $\varphi \in C^{0,\mu}(\partial\Omega)$ ($\mu > 1 - \alpha$) and assume that one of the limits $[T(w[\varphi], \varpi[\varphi])n]_{(i)}$ or $[T(w[\varphi], \varpi[\varphi])n]_{(e)}$ exists. Then, also the other limit exists and*

$$[T(w[\varphi], \varpi[\varphi])n]_{(i)}(\xi) = [T(w[\varphi], \varpi[\varphi])n]_{(e)}(\xi)$$

for any $\xi \in \partial\Omega$.

Let χ be a field defined on $\mathcal{E}_n$. If Ω is a bounded domain, set $\Omega_{(i)} = \Omega$ and $\Omega_{(e)} = \mathcal{E}_n \setminus \overline{\Omega}$; otherwise, if Ω is an exterior domain, set $\Omega_{(e)} = \Omega$ and $\Omega_{(i)} = \mathcal{E}_n \setminus \overline{\Omega}$. We denote by $\chi_{(i)}$ and $\chi_{(e)}$ two functions defined on $\overline{\Omega}_{(i)}$ and $\overline{\Omega}_{(e)}$, respectively, by setting

$$\chi_{(i)}(x) = \begin{cases} \chi(x), & \text{if } x \in \Omega_{(i)}, \\ \lim_{y \rightarrow x} \chi|_{\Omega_{(i)}}(y), & \text{if } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad \chi_{(e)}(x) = \begin{cases} \chi(x), & \text{if } x \in \Omega_{(e)}, \\ \lim_{y \rightarrow x} \chi|_{\Omega_{(e)}}(y), & \text{if } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

The relations

$$(2.4) \quad \begin{aligned} [T(v[\psi], P[\psi])n]_{(i)}(\xi) &= \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{L}\right)[\psi](\xi), \\ [T(v[\psi], P[\psi])n]_{(e)}(\xi) &= -\left(\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{L}\right)[\psi](\xi) \end{aligned}$$

and

$$(2.5) \quad \begin{aligned} w[\varphi]_{(i)}(\xi) &= \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{L}^*\right)[\varphi](\xi), \\ w[\varphi]_{(e)}(\xi) &= -\left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{L}^*\right)[\varphi](\xi), \end{aligned}$$

hold almost everywhere on $\partial\Omega$ if $\psi, \varphi \in L^1(\partial\Omega)$, and everywhere on $\partial\Omega$, if $\psi, \varphi \in C(\partial\Omega)$ (see, e.g., [6]).

The following uniqueness theorem, which we prove for the sake of completeness, will be useful in the sequel.

Theorem 2.1. *Let (u, p) be a solution to system (1.1) such that*

$$(2.6) \quad \begin{aligned} T(u, p)n + Au &= 0, & \text{if } \Omega \text{ is bounded,} \\ T(u, p)n - Au &= 0, & \text{if } \Omega \text{ is exterior.} \end{aligned}$$

If Ω is bounded, then $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ and $p = 0$. The same conclusion holds if Ω is exterior, provided

$$(2.7) \quad \mathbf{u} = \begin{cases} o(\log r), & n = 2, \\ o(1), & n > 2. \end{cases}$$

PROOF - Let Ω be exterior. Since $\mathbf{u}$ satisfies hypothesis (2.7) at infinity, by the Stokes formula (see, e. g., [1] and [2]) we have that

$$(2.8) \quad \mathbf{u} = \begin{cases} O(1), & n = 2, \\ O(r^{2-n}), & n > 2, \end{cases} \quad p, \nabla \mathbf{u} = \begin{cases} O(r^{-2}), & n = 2, \\ O(r^{1-n}), & n > 2. \end{cases}$$

Multiply both sides of (1.1) by $\mathbf{u}$ and integrate over $\Omega \cap S_R$, where S_R is the ball centered at o and of radius R . Choosing R such that $S_R \supset \Omega_0$ and integrating by parts, we have

$$(2.9) \quad 2 \int_{\Omega \cap S_R} |\hat{\nabla} \mathbf{u}|^2 dv = - \int_{\partial \Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} da + \int_{\partial S_R} \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}, p) \mathbf{e}_R da.$$

Letting $R \rightarrow \infty$ in (2.9) and taking into account (2.8) and the boundary condition (2.6)₂, we see that

$$2 \int_{\Omega} |\hat{\nabla} \mathbf{u}|^2 dv + \int_{\partial \Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \mathbf{u} da = 0.$$

Hence uniqueness follows at once. The proof of the Lemma for Ω bounded is completely analogous, so it is omitted. $\square$

Remark 2.1 - Let Ω be an exterior domain, assume $\mathbf{A} = c\mathbf{1}$ and consider a solution to the Robin problem $(\mathbf{u}, p)$ corresponding to a constant vector $\mathbf{s}$ on $\partial \Omega$ and such that

$$(2.10) \quad \mathbf{u} = o(1), \quad \mathbf{T}(\mathbf{u}, p) = o(r^{1-n}).$$

Then, letting $R \rightarrow \infty$ in (2.9) and taking into account (2.10), (1.2)₂, we have that

$$(2.11) \quad 2 \int_{\Omega} |\hat{\nabla} \mathbf{u}|^2 dv + c \int_{\partial \Omega} |\mathbf{u}|^2 da = -\mathbf{s} \cdot \int_{\partial \Omega} \mathbf{u} da.$$

On the other hand, it is simple to realize that (2.10)₂ implies

$$(2.12) \quad \int_{\partial \Omega} \mathbf{T}(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} da = c \int_{\partial \Omega} \mathbf{u} da + |\partial \Omega| \mathbf{s} = \mathbf{0}$$

so that from (2.11), (2.12) and (2.1)₂ it follows that

$$2 \int_{\Omega} |\hat{\nabla} \mathbf{u}|^2 dv + c \int_{\partial\Omega} |\mathbf{u}|^2 da = \frac{c}{|\partial\Omega|} \left| \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} da \right|^2.$$

Hence, by Schwarz's inequality, from (2.10)₁ it follows that $\mathbf{u}$ must be the null vector. The above conclusion allows us to affirm that there exists no solution to the Robin problem which satisfies (2.10) with the boundary condition (2.1)₂ where $\mathbf{s}$ is a constant vector and $\mathbf{A} = c\mathbf{1}$.

3 Existence theorems

Let Ω be bounded. We aim at finding a solution to the Robin problem in the form of a single layer potential. Therefore, we are led to consider the integral equation

$$(3.1) \quad \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{L}\right)[\psi] + \mathbf{A}\mathbf{v}[\psi] = \mathbf{s}$$

on $\partial\Omega$. Of course, if equation (3.1) admits a solution $\psi \in C(\partial\Omega)$, then the pair $(\mathbf{v}[\psi], \mathbf{P}[\psi])$ furnishes the desired solution. Since by Lemma 2.1 the operator $\mathcal{L}[\psi] + \mathbf{A}\mathbf{v}[\psi]$ is trivially compact in $L^q(\partial\Omega)$ ($q > n - 1$), to solve (3.1) we are allowed to make use of Fredholm's alternative (see, e.g., [7]). Then, we have to study the kernels $\mathcal{S}$ and $\mathcal{S}^*$ of the homogeneous equation

$$(3.2) \quad \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{L}\right)[\psi] + \mathbf{A}\mathbf{v}[\psi] = \mathbf{0}$$

and of its adjoint

$$(3.3) \quad \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{L}^*\right)[\varphi] + \mathbf{v}[\mathbf{A}\varphi] = \mathbf{0},$$

respectively.

Lemma 3.1. *Let Ω be a bounded domain. If $n > 2$, then $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{S}^* = m$. If $n = 2$, then $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{S}^* = m + k$, where the number $k \in \{0, 1, 2\}$ depends only on Ω_0 .*

PROOF - Let $\psi \in L^1(\partial\Omega)$ be a solution to (3.2). Then, by the uniqueness theorem 2.1, $\mathbf{v}[\psi] = \mathbf{0}$ in Ω_0 , so that ψ is a solution to the equation

$$(3.4) \quad \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{L}\right)[\psi] = \mathbf{0}.$$

On the other hand, any solution to equation (3.4) such that $v[\psi] = \mathbf{0}$ in Ω_0 satisfies (3.2). Therefore, denoting by $\mathcal{W}$ the linear space of the solutions to equation (3.4), $\mathcal{S}$ is the subspace of $\mathcal{W}$ whose elements are the densities ψ such that $v[\psi] = \mathbf{0}$ in Ω_0 .

In [8] we proved (Theorem 3.2) that $\mathcal{W}$ is the space spanned by the system $\{\psi_i, \mathbf{n}_h\}_{i \in \{1, \dots, n(n+1)/2\}, h \in \{1, \dots, m\}}$, where

$$(3.5) \quad \psi_i(\xi) = \begin{cases} \psi_i^*(\xi), & \xi \in \partial\Omega_0, \\ \mathbf{0}, & \xi \notin \partial\Omega_0, \end{cases} \quad i \in \{1, \dots, n(n+1)/2\},$$

and

$$(3.6) \quad \mathbf{n}_h(\xi) = \begin{cases} \mathbf{n}(\xi), & \xi \in \partial\Omega_h, \\ \mathbf{0}, & \xi \in \partial\Omega \setminus \partial\Omega_h, \end{cases} \quad h \in \{1, \dots, m\},$$

In (3.5), the functions ψ_i^* ($i \in \{1, \dots, n(n+1)/2\}$) are independent densities defined on $\partial\Omega_0$ such that $v[\psi_i^*]$ is a rigid motion in Ω_0 .

A direct computation shows that $v[\mathbf{n}_h] = \mathbf{0}$ in Ω_0 for any $h \in \{1, \dots, m\}$. If $n > 2$, none of the fields $v[\psi_i]$ vanishes in Ω_0 , whereas, if $n = 2$, there are at most 2 independent densities ψ_i such that $v[\psi_i] = \mathbf{0}$ in Ω_0 (see [5] or [8], Lemma 3.3). $\square$

The above lemma enables us to prove the following

Theorem 3.1. *Let Ω be a bounded domain. Then the Robin problem admits a unique solution expressed by*

$$\mathbf{u} = v[\psi - A\varphi] + w[\varphi]$$

where ψ and φ are uniquely determined elements of $C(\partial\Omega)/\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}^*$.

PROOF - We have to find a solution to the equation

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{L}\right)[\psi](\xi) + A v[\psi](\xi) &= s + A(v[A\varphi] - w[\varphi])_{(i)} \\ &\quad - T(w[\varphi], \varpi[\varphi])\mathbf{n} \\ &\quad + [T(v[A\varphi], P[A\varphi])\mathbf{n}]_{(i)}. \end{aligned}$$

for some $\varphi \in \mathcal{S}^*$. To this end it is sufficient to show that there exists a $\varphi \in \mathcal{S}^*$ such that the compatibility condition

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \{T(w[\varphi], \varpi[\varphi])n - [T(v[A\varphi], P[A\varphi])n]_{(i)}\} \cdot \varphi' da \\ + \int_{\partial\Omega} [A(w[\varphi]_{(i)} - v[A\varphi])] \cdot \varphi' da = \int_{\partial\Omega} s \cdot \varphi' da, \quad \forall \varphi' \in \mathcal{S}^*, \end{aligned}$$

is satisfied. This is certainly true if the homogeneous equation

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \{T(w[\varphi], \varpi[\varphi])n - [T(v[A\varphi], P[A\varphi])n]_{(i)}\} \cdot \varphi' da \\ + \int_{\partial\Omega} [A(w[\varphi]_{(i)} - v[A\varphi])] \cdot \varphi' da = 0, \quad \forall \varphi' \in \mathcal{S}^*, \end{aligned}$$

admits only the trivial solution $\varphi = 0$. To show this, choose in (3.7) $\varphi' = \varphi$. Multiply both sides of equation $\operatorname{div} T(w[\varphi], \varpi[\varphi]) - \operatorname{div} T(v[A\varphi], \varpi[A\varphi]) = 0$ by $w[\varphi] - v[A\varphi]$ and integrate on Ω . Then, integrating by parts and taking into account that $w[\varphi]_{(i)} - v[A\varphi] = \varphi$, from (3.7) it follows that

$$2 \int_{\Omega} |\hat{\nabla}(w[\varphi] - v[A\varphi])|^2 dv + \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot A\varphi da = 0.$$

Hence the desired result follows at once. $\square$

In order to show existence in exterior domains denote by $\mathcal{T}$ and $\mathcal{T}^*$ the solutions in $L^1(\partial\Omega)$ of the equation

$$(3.8) \quad -(\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{L})[\psi] - Av[\psi] = 0$$

and its adjoint

$$(3.9) \quad -(\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{L}^*)[\varphi] - v[A\varphi] = 0.$$

Lemma 3.2. *Let Ω be an exterior domain. If $n \geq 3$, then $\dim \mathcal{T} = \dim \mathcal{T}^* = m$ and a basis of $\mathcal{T}$ is given by the fields defined by (3.6).*

PROOF - Let ψ be a solution to equation (3.8). Since $v[\psi] = O(r^{2-n})$ and $\nabla v[\psi] = O(r^{1-n})$, an integration by parts in Ω yields

$$2 \int_{\Omega} |\hat{\nabla} v[\psi]|^2 dv + \int_{\partial\Omega} v[\psi] \cdot Av[\psi] da = 0.$$

Hence it follows that $v[\psi] = \mathbf{0}$ and $P[\psi] = 0$ in Ω , so that any solution to equation (3.8) satisfies the equation

$$(3.10) \quad -(\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{L})[\psi] = \mathbf{0}.$$

In [8] we proved that the solutions to this equation are the elements of the space spanned by the functions (3.6). On the other hand, a direct inspection shows that all the fields (3.6) are solutions to (3.8) so that the Lemma is proved. $\square$

Theorem 3.2. *Let Ω be an exterior domain of $\mathcal{E}_n$, with $n \geq 3$. Then the Robin problem admits a solution expressed by*

$$\mathbf{u} = v[\psi + A\varphi] + w[\varphi]$$

where ψ and φ are uniquely determined elements of $C(\partial\Omega)/\mathcal{T} \in \mathcal{T}^*$. This solution is unique in the class of all vector fields such that $\mathbf{u} = o(1)$.

PROOF - The existence is obtained by repeating the steps in the proof of Theorem 3.1 with obvious modifications. The uniqueness is proved in Theorem 2.1. $\square$

References

- [1] CHANG, I.-D. AND FINN, R.: On the solutions of a class of equations occurring in continuum mechanics, with applications to the Stokes paradox. *Arch. Rational Mech. Anal.* **7** (1961), 388–401.
- [2] GALDI, G. P.: *An introduction to the mathematical theory of the Navier–Stokes equations*, vol. I, II, revised edition. Springer Tracts in Natural Philosophy **38**, **39**, Springer–Verlag (1998).
- [3] LADYZHENSKAIA, O. A.: *The Mathematical theory of viscous incompressible fluid*. Gordon and Breach (1969).
- [4] MAREMONTI, P.: On the Stokes equations: the maximum modulus Theorem. *Math. Models Methods Appl. Sci.* **10** (2000), 1047–1072.
- [5] MAREMONTI, P., RUSSO, R. AND STARITA, G.: On the Stokes equations: the boundary value problem. *Quad. Mat.* **4** (1999), 69–140.
- [6] MIRANDA, C.: *Partial differential equations of elliptic type*. Springer–Verlag, 1970.

- [7] MIRANDA, C.: *Istituzioni di analisi funzionale lineare*. Unione Matematica Italiana, Oderisi Gubbio Editrice (1978).
- [8] STARITA, G. AND TARTAGLIONE, A.: On the traction problem for the Stokes system. *Math. Models Methods Appl. Sci.* (to appear).

On the nonlinear diffusion in the exterior of a sphere

Nota di I. Torcicollo^{1*} e M. Vitiello¹

Presentata dal Socio Salvatore Rionero
(Adunanza del 9 novembre 2001)

Abstract - The long time behaviour of the solutions of the equation $u_t = \Delta F(u)$ in exterior domains is studied.

Riassunto - Viene studiato l'andamento asintotico delle soluzioni dell'equazione $u_t = \Delta F(u)$ in domini esterni.

1. Introduction

Let $\Omega_0 \subset R^3$ be a sufficiently smooth bounded fixed domain ensuring the validity of divergence-like theorems and denote by Ω the exterior of Ω_0 . Let us consider the initial boundary value problem

$$\begin{cases} u_t = \Delta F(u) & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times R^+ \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ u(\mathbf{x}, t) = u_1(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t \in R^+ \end{cases} \quad (1)$$

where $F \in C^2(R)$, $u_0 \in C(\overline{\Omega})$, $u_1 \in C(\partial\Omega)$ are assigned functions.

The problem (1) can model many physical, chemical or biological phenomena. In fact equation (1)₁ can be found in the porous fluid theory, in the filtration theory, in the mathematical biology and anisotropic MHD [5]-[11]. Problem (1) has been considered in [1] and [2] in the case of a bounded domain where, among other things, matters related to the asymptotic behaviour of solutions have been explored. Some stability and instability results concerning a more general initial boundary value problem are obtained in [12] and [2]. In particular in [2] the long time behaviour of solutions in the case of the bounded domain has been studied. Here we reconsider the problem, but in the case of exterior domains.

Our aim is to obtain, in the class of smooth solutions, conditions on F under which each solution tends toward a steady state when $t \rightarrow \infty$, in the case that Ω is an unbounded domain. Precisely, considering the steady boundary value problem

$$\begin{cases} \Delta F(U) = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ U = u_1(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

our goal is to show that, when

$$m \leq F'(u) \leq m^* \quad \forall u \in R, \quad (3)$$

¹Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II", Via Cintia, Complesso Monte S. Angelo, 80126 Napoli, (e-mail:torcicol@unina.it).

where m and m^* are positive constants, the solution U of (2) represents the asymptotic state of any solution of (1).

Let us underline that, under the assumption

$$F'(u) > 0 \quad \forall u \in R, \quad (4)$$

setting

$$F_1 = F(u_1)$$

the solvability of the problem (2) depends on that of the problem

$$\begin{cases} \Delta F = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ F = F_1 & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5)$$

If we denote by F^* the solution of (5), from $F(U) = F^*$, on taking into account the assumption (4) and denoting by φ the (unique) inverse of F , it follows that

$$U = \varphi(F^*). \quad (6)$$

Then the uniqueness for the problem (5) gives the uniqueness for (2).

The plan of the paper is the following. Section 2, after the introduction of the perturbation problem, is dedicated to some necessary preliminaries. Section 3 deals with the asymptotic stability of solutions in a suitable weighted L^2 -norm, while a pointwise estimate is given in Section 4. The note ends with the application to the case concerning the heat conduction with exponential diffusivity, in the exterior of a sphere (Section 5).

2. Preliminaries

In order to write the perturbation problem let us define

$$u = U + v$$

and

$$L(U, v) = F(U + v) - F(U);$$

then, from (1)-(2), it follows that

$$\begin{cases} v_t = \Delta L & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ v(\mathbf{x}, 0) = v_0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ v = 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (7)$$

Remark 1. It is useful to emphasize that $v = 0 \Rightarrow L = 0$. In addition (4) implies $v = 0 \Leftrightarrow L = 0$.

Let us recall here, a suitable Poincaré inequality [4], we will use in the next section and some results proved in [1] and [3], useful throughout the paper.

A weighted Poincaré inequality. Let Ω the exterior of a sphere Ω_0 of radius r_0 , and S the set of functions $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ such that

$$\int_{\Omega} \left[\frac{u^2}{r^k} + \nabla u : \nabla u \right] d\Omega < \infty, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad k \in [2, 3].$$

Then, $\forall u \in S$, the following inequality holds

$$\int_{\Omega} \frac{u^2}{(\frac{r}{r_0})^k} d\Omega \leq (\frac{2r_0}{3-k})^2 \int_{\Omega} (\nabla u)^2 d\Omega \quad (8)$$

where $r = (\sum_{i=1}^3 x_i^2)^{\frac{1}{2}}$.

Lemma 1. *Let*

$$G(v, U) = \int_0^v L(\bar{v}, U) d\bar{v} \quad v \in R. \quad (9)$$

One has

$$G(0, U) = [\frac{\partial G}{\partial v}]_{v=0} = 0, \quad (10)$$

$$L^2(v, U) \geq 2mG(v, U), \quad (11)$$

$$G(v, U) \geq \frac{1}{2}mv^2, \quad (12)$$

$$L^2(v, U) \leq 2m^*G(v, U). \quad (13)$$

Lemma 2. *Let*

$$\mathcal{E}(v, U) = \int_0^v L^{2n+1}(\bar{v}, U) d\bar{v} \quad v \in R, \quad (14)$$

(n being a non negative integer); then it follows that

$$\mathcal{E} < vL^{2n+1}, \quad (15)$$

$$L^{2n+2} \geq m\mathcal{E}, \quad (16)$$

$$\mathcal{E} \geq \frac{m^{2n+1}}{2(n+1)} v^{2(n+1)}, \quad (17)$$

$$L^{2n+2} \leq 2(n+1)m^*\mathcal{E}. \quad (18)$$

3. Convergence to asymptotic states

In this section we study the asymptotic stability in a suitable weighted L^2 -norm of solutions to the system (2) and show that U is the asymptotic state of any solution of (1). We reach our task in the class of perturbations v such that (3) holds and $v_0 \in L^2(\Omega)$.

To this end let us introduce the functional

$$V(t) = \int_{\Omega} gG[v(\mathbf{x}, t), U(\mathbf{x})] d\Omega \quad (19)$$

where $G(U, v)$ is defined as in (9) and the weight is given by $g = e^{-\alpha r}$ ($\alpha > 0$). Because of (10) and (12), it turns out that V is positive definite.

Evaluating the time derivative of (19) along the solutions of (7) we obtain

$$\dot{V}(t) = \int_{\Omega} gL\Delta L d\Omega$$

and from

$$\int_{\Omega} gL\Delta L \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (g\nabla L \cdot L - \frac{1}{2}L^2\nabla g) \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} L^2\Delta g \, d\Omega - \int_{\Omega} g\nabla L : \nabla L \, d\Omega$$

it follows that

$$\dot{V}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta g L^2 \, d\Omega - \int_{\Omega} g(\nabla L)^2 \, d\Omega. \quad (20)$$

Being $\Delta g \leq \alpha^2 g$ and (13) holding it turns out that

$$\dot{V}(t) \leq \alpha^2 m^* V(t) - \int_{\Omega} g(\nabla L)^2 \, d\Omega. \quad (21)$$

The application of Gronwall's lemma in (21) gives

$$V(t) + \int_0^t e^{\alpha^2 m^* (t-\tau)} \int_{\Omega} g(\nabla L)^2 \, d\Omega d\tau \leq V_0 e^{\alpha^2 m^* t}. \quad (22)$$

Since the right hand side converges to a finite quantity as $\alpha \rightarrow 0$, it follows from the monotone convergence theorem, on letting $\alpha \rightarrow 0$ that

$$V_1(t) + \int_0^t \int_{\Omega} (\nabla L)^2 \, d\Omega d\tau \leq V_1(0) \quad (23)$$

where

$$V_1 = \int_{\Omega} G(v, U) d\Omega. \quad (24)$$

We are now in position to obtain stability on initial data. In fact

$$V_1(t) \leq V_1(0) \quad \forall t$$

implies the stability in the measure of V_1 . Precisely, by using (12), from

$$\int_{\Omega} v^2 d\Omega \leq \frac{2}{m} V_1(0) \quad (25)$$

it turns out the stability in the L^2 -norm. On the other hand, from

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\nabla L)^2 d\Omega d\tau \leq V_1(0) \quad (26)$$

and by using the Poincaré inequality (8), it follows that

$$\left(\frac{3-k}{2r_0}\right)^2 \int_0^t \int_{\Omega} \frac{L^2}{\left(\frac{r}{r_0}\right)^k} d\Omega d\tau \leq V_1(0).$$

In view of (11) it derives

$$\left(\frac{3-k}{2r_0}\right)^2 \int_0^t \int_{\Omega} \frac{G}{\left(\frac{r}{r_0}\right)^k} d\Omega d\tau \leq \frac{V_1(0)}{2m} \quad (27)$$

and setting

$$W(t) = \int_{\Omega} \frac{G(v, U)}{\left(\frac{r}{r_0}\right)^k} d\Omega$$

the (27) becomes

$$\int_0^t W(\tau) d\tau \leq V_1(0) \quad t \in [0, \infty[.$$

From the last inequality it follows that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = 0$$

that is a type of asymptotic stability in the measure of W .

Remark 2. Concerning the initial value $V_1(0)$ of V_1 let us remark that, by using (3) it follows that

$$V_1(0) = \int_{\Omega} \int_0^{v_0} L dv d\Omega = \int_{\Omega} \int_0^{v_0} F'(U + \sigma v) v dv d\Omega \leq \frac{m^*}{2} \int_{\Omega} v_0^2 d\Omega \quad [\sigma \in (0, 1)].$$

4. A pointwise estimate

The main result of this section is to show that, in the class of perturbations v such that $\int_{\Omega} v_0^{2(n+1)} d\Omega < \infty$,

$$|v(\mathbf{x}, t)| < \epsilon \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$$

with $\epsilon \rightarrow 0$ when $|v_0| \rightarrow 0$.

In order to obtain this goal let us introduce the functional

$$\mathcal{M}(t) = \int_{\Omega} g \mathcal{E} d\Omega \quad (28)$$

where $\mathcal{E}$ is given by (14), $g = e^{-\alpha r}$ ($\alpha > 0$) and remark that, by using (17), it is positive definite. Along the solution to (7) one has

$$\dot{\mathcal{M}}(t) = \int_{\Omega} g L^{2n+1} \Delta L d\Omega.$$

From

$$g L^{2n+1} \Delta L = \nabla \cdot \left(g \nabla L \cdot L^{2n+1} - \frac{1}{2n+2} L^{2n+2} \nabla g \right) + \frac{1}{2n+2} L^{2n+2} \Delta g - \frac{(2n+1)}{(n+1)^2} g (\nabla L^{n+1})^2$$

it follows that

$$\dot{\mathcal{M}}(t) = \frac{1}{2n+2} \int_{\Omega} L^{2n+2} \Delta g d\Omega - \frac{(2n+1)}{(n+1)^2} \int_{\Omega} g (\nabla L^{n+1})^2 d\Omega. \quad (29)$$

By using $\Delta g \leq \alpha^2 g$ and (18), the (29) gives

$$\dot{\mathcal{M}}(t) \leq \alpha^2 m^* \int_{\Omega} g \mathcal{E} d\Omega - \frac{(2n+1)}{(n+1)^2} \int_{\Omega} g (\nabla L^{n+1})^2 d\Omega$$

and in view of Gronwall's lemma

$$\mathcal{M}(t) + \frac{(2n+1)}{(n+1)^2} \int_0^t e^{\alpha^2 m^* (t-\tau)} \int_{\Omega} g (\nabla L^{n+1})^2 d\Omega d\tau \leq \mathcal{M}(0) e^{\alpha^2 m^* t}. \quad (30)$$

Letting $\alpha \rightarrow 0$, the right hand side converges to a finite quantity, hence²

$$\mathcal{M}_1(t) \leq \mathcal{M}_1(0) \quad \forall t \quad (31)$$

where $\mathcal{M}_1(t) = \int_{\Omega} \mathcal{E} d\Omega$ and in view of (17) it implies

$$\int_{\Omega} v^{2(n+1)} d\Omega \leq \frac{2(n+1)}{m^{2n+1}} \mathcal{M}_1(0), \quad (32)$$

i.e. the steady state U is stable in the L^{2n} -norm.

Raising both sides of (32) to $(2n+2)^{-1}$ one has

$$\left[\int_{\Omega} v^{2(n+1)} d\Omega \right]^{\frac{1}{2(n+1)}} \leq \frac{[2(n+1)]^{\frac{1}{2(n+1)}}}{m^{\frac{2n+1}{2(n+1)}}} [\mathcal{M}_1(0)]^{\frac{1}{2(n+1)}} \quad (33)$$

and finally

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} v^{2n+2} d\Omega \right]^{\frac{1}{2n+2}} \leq \frac{1}{m^2} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} L^{2n+2}(v_0) d\Omega \right)^{\frac{1}{2n+2}} \right], \quad (34)$$

that is

$$|v(\mathbf{x}, t)| \leq \frac{1}{m^2} \left[\sup_{\Omega} L(v_0) \right]. \quad (35)$$

Remark 3. *It is useful to underline that, when $|v_0| \rightarrow 0$, $L(v_0) \rightarrow 0$.*

5. An application

In the past several years, diffusion systems have attracted a great deal of attention from mathematicians and other scientists.

In fact nonlinear diffusion mechanisms are well-known in literature and the equation (1)₁, where u denotes a “concentration”, is one of the most used models. As we have seen at the beginning of this note it can model many types of phenomena.

In this section we show an application of the results obtained in the previous ones.

Let $\Omega \subset R^3$ be the exterior domain of a sphere Ω_R of radius R , centred at the origin in R^3 and let us consider the well-known solution³ of the problem (5)

$$F^*(r) = \frac{F_1 R}{r} \quad (r > R). \quad (36)$$

Let us consider the case concerning the nonlinear heat conduction in solids where u denotes the temperature and $F(u)$ is connected to the diffusivity $k(u)$ by

$$F(u) = \int_0^u k(\bar{u}) d\bar{u}. \quad (37)$$

In particular let us consider the case of exponential diffusivity [14]

$$k(u) = k_0 e^{-\gamma u} \quad (38)$$

$$^2 \mathcal{M}_1(0) = \int_{\Omega} \int_0^{v_0} L^{2n+1} dv d\Omega = \int_{\Omega} \int_0^{v_0} [F'(U + \sigma v)]^{2n+1} v^{2n+1} dv d\Omega \leq \frac{(m^*)^{2n+1}}{2n+2} \int_{\Omega} v_0^{2n+2} d\Omega.$$

³Let us notice that for many domains and for many types of boundary data, explicit analytic solutions of the problem at the hand can be found in [13].

where k_0 and $\gamma < \frac{k_0}{F_1}$ are positive constants. Being

$$F'(u) = k_0 e^{-\gamma u} > 0 \quad (39)$$

in view of (6), it follows that

$$U = \log \left(1 - \frac{\gamma F_1 R}{k_0 r} \right)^{-\frac{1}{\gamma}}; \quad (40)$$

in addition, $0 < u < u^*$ implies

$$m < F'(u) < m^* \quad (41)$$

where $m^* = k_0$ and $m = k_0 e^{-\gamma u^*}$.

According to (9), let us introduce

$$G = \int_0^v L d\bar{v} \quad (42)$$

with

$$L(U, v) = F(U + v) - F(U) = \frac{k_0}{\gamma} e^{-\gamma U} (1 - e^{-\gamma v}). \quad (43)$$

Easily it follows that $L(U, 0) = 0$ and $G(U, v)$ is positive definite.

We are in position to apply the results obtained in section 3 and hence the solution (40) is the asymptotic state of each solution.

Acknowledgements - This work has been performed under the auspices of the G.N.F.M. of I.N.D.A.M. and M.U.R.S.T. (P.R.I.N.): "Nonlinear mathematical problems of waves propagation and stability in continuous media". The Authors thank gratefully Prof. Salvatore Rionero for having proposed the present research and his helpful suggestions.

References

- [1] J. N. Flavin and S. Rionero, *Asymptotic and other properties of a nonlinear diffusion model*, J. Math. Analysis. Appl. 228, 119-140, (1998).
- [2] S. Rionero, *Asymptotic and other properties of some nonlinear diffusion models*, Cont. Mech. Appl. Geoph. Env., Eds. B. Straughan, R. Greve, H. Ehrentaut, Y. Wang, Springer, pp. 56 - 78 (2001).
- [3] J. N. Flavin and S. Rionero, *A Free Boundary Value Problem for a nonlinear Heat Equation*, (to appear).
- [4] F. Capone and M. De Angelis, *On the energy stability of fluid motions in exterior of a sphere under free boundary like conditions*, Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Serie IV vol LX, (1995).
- [5] J. N. Flavin and S. Rionero, *Qualitative Estimates for Partial Differential Equation, An Introduction*, CRC Press, Boca Raton, FL, (1995).
- [6] G. P. Galdi and S. Rionero, *Weighted energy methods in fluid dynamics and elasticity*, Lectures Notes in Math., 1134, Springer-Verlag, (1985).
- [7] J. Smoller, *Shock waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, n.258 of "A Series of Comprehensive Studies in Mathematics", (1983).
- [8] J. D. Murray, *Mathematical Biology*, Biomathematics Text, 19, Springer-Verlag, (1989).
- [9] M. E. Gurtin and R. C. Mac Camy, *On the diffusion of biological populations*, Mathematical Biosciences, 33, 35, (1977).

- [10] M. Maiellaro and S. Rionero, *On the stability of Couette-Poiseuille flows in the anisotropic M.H.D. via the Liapunov Direct Method*, Rend. Acc. Sc. Fisiche Matem. Napoli, (1995).
- [11] P. Benilan and M. G. Grandall, *The Continuous dependence of solutions of $u_t - \Delta(\phi(u)) = 0$* , Indiana Un. Mat. vol.30, n.2, 1, (1981).
- [12] F. Capone, S. Rionero and I. Torcicollo, *On the stability of solutions of the remarkable equation $u_t = \Delta F(x, u) - g(x, u)$* , Suppl. Rend. Cir. Mat. Palermo, serie II, n.45, (1996).
- [13] H. S. Carslaw and S. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed., Clarendon, Oxford, (1959).
- [14] J. Crank, *The Mathematics of Diffusion*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford, (1957).

L'epistolario Genocchi-Sella (1851-1883)

Parte prima: I testi

Nota di Luciano Carbone*, Giuseppe Cardone**, Luisa Faella*

Presentata dal Socio Luciano Carbone
(Adunanza del 7 dicembre 2001)

Riassunto – Nella presente nota pubblichiamo i testi della corrispondenza epistolare intercorsa tra il noto matematico Angelo Genocchi e il celebre scienziato e uomo politico Quintino Sella. Tema centrale della corrispondenza sono le vicende dell'Accademia Nazionale dei Lincei e della Società Nazionale delle Scienze.

Abstract – In this work we publish the correspondence between Angelo Genocchi, the well known mathematician, and Quintino Sella, the celebrated statesman and scientist. The central theme of the correspondence is given by the vicissitudes of Accademia Nazionale dei Lincei and of Società Nazionale delle Scienze.

* Università degli Studi di Napoli – Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli" - Complesso Monte S. Angelo, Via Cintia, 80126 Napoli, Italy - email: carboluc@unina.it, lufaella@unina.it.

** Seconda Università di Napoli - Dipartimento di Ingegneria Civile - Via Roma, 29 - 81031 Aversa (CE), Italy - email: giuseppe.cardone@unina2.it.

1. INTRODUZIONE

Alla morte di Francesco Siacci¹, la vedova donò al Seminario matematico dell'Università di Napoli un gruppo di lettere in possesso del marito. Si trattava essenzialmente di alcune corrispondenze epistolari intrattenute da Angelo Genocchi², che gli erano state trasmesse affinché potesse scriverne il necrologio. Con l'occupazione militare dei locali del Seminario³ intercorsa durante gli anni del secondo conflitto mondiale, si persero le tracce del legato.

Esso è stato di recente recuperato⁴ e talune corrispondenze sono subito apparse di grande interesse. Una di queste, quella con Luigi Cremona⁵, è già stata pubblicata. Ad essa fa seguito ora quella con Quintino Sella⁶. Anche di questa, come per quella di Cremona, non solo si possono dare le lettere di Sella a Genocchi custodite presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli" dell'Università di Napoli "Federico II", ma anche le lettere di Genocchi a Sella conservate presso la fondazione Sella San Gerolamo di Biella.

In questa prima parte ci limiteremo a presentare i testi e a fornire alcuni cenni biobibliografici su Genocchi e Sella; in una seconda parte, attualmente in preparazione, daremo un commento ed uno studio dell'epistolario. Vogliamo qui solo segnalare che il tema centrale della corrispondenza è costituito dalle vicende dell'Accademia Nazionale

¹ Francesco Siacci (1839-1907); su di lui cfr. R. Gatto, *Storia di una anomalia. Le facoltà di Scienze dell'Università di Napoli tra l'unità d'Italia e la riforma Gentile. 1860-1923*, Napoli, Fridericiana Editrice Universitaria 2000.

² Su di lui cfr. i *Cenni biobibliografici* costituenti il paragrafo secondo di questa nota.

³ Sul Seminario matematico cfr. L. Carbone-G. Cardone-J. Casanovas-S. Mancuso-F. Palladino, *La sede storica degli studi superiori di matematica a Napoli nella sua attuale configurazione*, Rendiconto dell'Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli, (II) LXV (1997), pp. 31-66.

⁴ Sul recupero del fondo Siacci cfr. L. Carbone – R. Gatto, *Il carteggio del Fondo Siacci della Biblioteca del Dipartimento di Matematica "Renato Caccioppoli" dell'Università "Federico II" di Napoli*, "Nuncius" XII (1997), pp. 443-446.

⁵ Luigi Cremona (1830-1903); cfr. *Dizionario biografico degli Italiani*, Roma, Istituto dell'Enciclopedia Italiana 1960-, voce a cura di L. Rossi e U. Bottazzini. Per il volume contenente l'epistolario Cremona – Genocchi cfr. i *Cenni biobibliografici* costituenti il paragrafo secondo di questa nota.

⁶ Su di lui cfr. i *Cenni biobibliografici* costituenti il paragrafo secondo di questa nota.

dei Lincei, di cui Sella fu il restauratore e, fino alla morte, il presidente, e della Società Nazionale delle Scienze.

Desideriamo inoltre ringraziare il già citato Dipartimento di Matematica e la Fondazione Sella che hanno messo a nostra disposizione copia delle lettere.

Precisiamo infine che il testo presentato è esattamente quello riscontrabile nei manoscritti senza alcun aggiornamento ortografico o scioglimento di sigle. In luogo di qualche termine non interpretato, sono stati inseriti tre puntini racchiusi in parentesi uncinate; analogamente se l'interpretazione è dubbia, è stata inserita tra parentesi uncinate; il completamento di qualche lacuna è stato inserito tra parentesi quadre gli errori degli scriventi (piuttosto frequenti, com'è noto, in Sella; piuttosto rari in Genocchi) sono talora stati annotati con un *sic*, seguito dalla versione corretta, anch'esso tra parentesi quadre. Le parti sottolineate, secondo l'usuale convenzione, sono rese col carattere corsivo.

2. CENNI BIBLIOGRAFICI

Angelo Genocchi, nacque a Piacenza nel 1817 e conseguì la laurea in giurisprudenza nel 1838; nel 1847 divenne titolare della cattedra di Istituzioni civili presso la facoltà della stessa disciplina dell'Università di Piacenza. Dopo la sconfitta di Custoza nel 1848 emigrò a Torino e frequentò le lezioni di Giovanni Piana e Felice Chiò. Finì così per dedicarsi esclusivamente agli studi matematici e nel 1859 divenne titolare della cattedra di algebra e geometria complementare presso la Facoltà di Scienze dell'Università di Torino. Dal 1865-66 fino alla morte, avvenuta nel 1889 a Torino, insegnò Calcolo infinitesimale. Nel 1886 fu nominato senatore. La sua opera più celebre, di cui disconobbe peraltro la paternità, è senza dubbio il *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale pubblicato con aggiunte del dr. Giuseppe Peano*, Torino, Fratelli Bocca, 1884.

La bibliografia su di lui è piuttosto abbondante.

Dal punto di vista biografico il contributo più recente è costituito da L. Giacardi, *Angelo Genocchi*, in C.S. Roero (curatrice), *La Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche, Naturali di Torino 1848-1998*, Torino, Deputazione subalpina di Storia Patria, 1999, 2 tomi, t. II, pp. 461-467.

Tra le commemorazioni d'epoca sono assai rilevanti le seguenti: E. D'Ovidio, *Discorso pronunciato in occasione dello scoprimento del busto in marmo di Genocchi nella sede dell'Accademia delle Scienze di Torino* in *Onoranze di A. Genocchi*, "Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino", XXVII (1891-1892), pp. 1090-1106; G. Peano, *Angelo Genocchi*, "Annuario della R. Università di Torino", 1889, pp. 195-202; F. Siaci, *Cenni necrologici di Angelo Genocchi*, "Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino", (II) XXXIX (1889), pp. 463-495.

All'opera di Genocchi è dedicato il volume A. Conte – L. Giacardi (curatori), *Angelo Genocchi e i suoi interlocutori scientifici. Contributi dall'epistolario*, Torino, Deputazione subalpina di Storia Patria, 1991.

Tra i lavori dedicati al suo epistolario segnaliamo: L. Fenoglio, *L'epistolario di Angelo Genocchi. Schedatura*, in A. Conte – L. Giacardi, già citato, pp. 303-393, che contiene l'elenco della corrispondenza Genocchi conservata presso la Biblioteca Passerini – Landi di Piacenza; G. Israel, *Su una corrispondenza fra B. Boncompagni e A. Genocchi*, in A. Conte – L. Giacardi, già citato, pp. 293-30 nel quale viene descritto un consistente numero di lettere scambiate tra Genocchi e Boncompagni, conservate presso la Biblioteca del Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo" dell'Università "La Sapienza" di Roma; L. Carbone – R. Gatto, *Il carteggio del Fondo Siaci della Biblioteca del Dipartimento di Matematica "Renato Caccioppoli" dell'Università "Federico II" di Napoli*, "Nuncius" XII (1997), pp. 443-446, nel quale vengono descritti gli scambi epistolari tra Genocchi e vari corrispondenti custoditi presso il Dipartimento "R. Caccioppoli" di Napoli.

Per quanto concerne infine i materiali editi dell'epistolario Genocchi segnaliamo: L. Carbone – R. Gatto – F. Palladino, *L'epistolario Cremona – Genocchi (1860 – 1886). La costituzione di una nuova figura di matematico nell'Italia unificata*, Firenze, Olschki, 2001; U. Cassina, *L'area di una superficie curva nel carteggio inedito di Genocchi con Schwarz e Hermite*, "Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Classe di Scienze Matematiche e Naturali", LXXXIII (1950), pp. 311-328; U. Cassina, *Alcune lettere e documenti inediti sul trattato di Calcolo Genocchi – Peano*, "Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Classe di Scienze Matematiche e Naturali", LXXXV (1950), pp. 337-362.

Varie lettere sono inoltre state edite in numerosi contributi contenuti in A. Conte – L. Giacardi (curatori) *Angelo Genocchi*, già citato.

Quintino Sella nacque a Sella di Mosso Santa Maria presso Biella nel 1827 da una famiglia di ricchi industriali lanieri. Fu professore di geometria nell'Istituto tecnico di Torino a partire dal 1852 e poi professore di mineralogia nella Scuola di applicazione per ingegneri dell'Università della stessa città. Si diede abbastanza presto alla vita politica; fu segretario generale del ministero della Pubblica istruzione nel governo Cavour dal marzo al giugno del 1861; Ministro delle Finanze nel governo Rattazzi dal marzo al dicembre 1862, nel governo La Marmora dal settembre 1864 al dicembre 1865, nel governo Lanza dal dicembre 1869 al luglio 1873; Ministro della Pubblica istruzione ad interim nel governo Lanza nel 1872.

Nella crisi europea del 1870 fu uno degli assertori più fermi della necessità da parte italiana di occupare Roma. Come ministro delle Finanze si propose il raggiungimento del pareggio del bilancio anche con leggi impopolari come quella sul macinato.

Fu restauratore dell'Accademia Nazionale dei Lincei che presiedette fino alla morte avvenuta a Biella nel 1884. Molto famose furono le sue *Lezioni di cristallografia* del 1862.

La bibliografia su Sella, dato il ruolo da lui giocato nella Italia postunitaria, è assai vasta. Ci limiteremo pertanto alle opere più recenti nelle quali peraltro sono contenuti ampie rassegne bibliografiche.

Per quanto riguarda la biografia segnaliamo: Lodovico Sella (curatore), *Cronologia in Quintino Sella 1827 – 1884, Catalogo della mostra documentaria*, Vercelli, Tipografia Gallo, 1984, pp. 165-177, pubblicata in occasione del centenario della morte di Sella; A. Guiccioli, *Quintino Sella*, 2 voll., Biella, Libreria Vittorio Giovannacci, 1988 ristampa anastatica di un'opera classica; F. Parlamento, *Quintino Sella* in C.S. Roero (curatrice), *La Facoltà di Scienze*, già citato t. II, pp. 477-482, nel quale viene prestata particolare attenzione alle attività di Sella come docente della Università di Torino; C. Dionisotti, *Ricordo di Quintino Sella*, "Rivista Storica Italiana", XCVII (1985), pp. 5-41, ove particolare attenzione è dedicata all'opera di Sella per la riforma della cultura italiana.

Sulle attività di Sella come promotore di scienza e scienziato segnaliamo: G. Quazza, *L'utopia di Quintino Sella. La politica della scienza*, Torino, Comitato di

Torino dell'Istituto per la Storia del Risorgimento Italiano, 1992; F. Bartoccini, *Quintino Sella e Roma: idea, mito e realtà in Quintino Sella tra politica e cultura 1827 – 1884*, Atti del Convegno nazionale di studi, Torino, Palazzo Carignano, 24-26 ottobre 1984, pp. 245-265; G.C. Lacaita, *Istruzione e sviluppo economico in Quintino Sella*, ivi, pp. 191-212; G. Rigault de la Longrais, *La figura scientifica di Quintino Sella*, in *Quintino Sella. Giornata lincea indetta in occasione del I centenario della morte (Roma 26 maggio 1984)*, "Atti dei Convegni Lincei", 64, Roma, Accademia Nazionale dei Lincei, 1984, pp. 16-26.

Per quanto concerne l'epistolario di Sella segnaliamo naturalmente G. e M. Quazza, *Epistolario di Quintino Sella*, Roma, Istituto per la Storia del Risorgimento, Vol. I, II, III, IV, V, 1980 -, che contiene le lettere scritte da Sella e di cui apparirà presto il sesto volume; inoltre P. Ziliani, *Quintino Sella e la cultura napoletana. I Lincei nell'Archivio della Fondazione Sella*, Napoli, Viviarum, 2000, nel quale sono presenti alcuni estratti delle lettere di Genocchi a Sella e numerose lettere di corrispondenti napoletani allo stesso Sella; P. Ziliani, *Quintino Sella presidente dell'Accademia dei Lincei e la Società italiana delle scienze. Analisi di una corrispondenza inedita (1874-1884)*, "Bollettino storico per la provincia di Novara", LXXXVI (1995), pp. 423-475; P. Ziliani, *Francesco De Sanctis e la riforma scolastica del 1861. Sette lettere inedite a Quintino Sella*, "Rassegna storica del Risorgimento", LXXXV (1998), pp. 291-308; A. Galante Garrone, *L'epistolario di Quintino Sella. Volume I in Quintino Sella tra politica e cultura*, già citato, pp. 167-178.

Su Sella economista ci limiteremo a ricordare: G. Are, *Il problema dello sviluppo economico dell'Italia nel pensiero e nell'opera di Quintino Sella*, in *Alle origini dell'Italia industriale*, Napoli, Guida, 1974, pp. 167-254.

Segnaliamo infine esplicitamente che riferimenti e stralci delle lettere di Genocchi a Sella sono presenti in G. Quazza, *L'utopia di Quintino Sella*, cit. ; P. Ziliani, *Quintino Sella presidente dell'Accademia dei Lincei*, cit..

3. LETTERE DI QUINTINO SELLA AD ANGELO GENOCCHI

Ricordiamo che le lettere di Quintino Sella ad Angelo Genocchi sono conservate presso la Biblioteca del Dipartimento di Matematica "Renato Caccioppoli" dell'Università di Napoli "Federico II" nel *Fondo Siacci* fascicolo "Sella-Genocchi".

1

QUINTINO SELLA AD ANGELO GENOCCHI

[Torino?, febbraio 1860]⁷

Illustre Sig.

Il conte di S. Robert⁸ già colonnello di Artiglieria ed i cui lavori sulla balistica saranno forse noti alla Signoria Vostra Chiarissima mi chiedeva alcuni giorni fa di chi avrebbe potuto integrargli un differenziale che capitava in un suo lavoro. Io risposi tosto parlando di Lei, e narrando quanto era occorso a me in una certa circostanza. Dissi di più che ero abbastanza in relazione con Lei per prendermi la libertà di proporle l'integrale di cui il Sig. S. Robert abbisognava.

Ciò premesso ecco la lettera di S. Robert che dopo il mio colloquio mi scrisse. Non abuso io di Lei trasmettendole la lettera⁹ e pregandola di dare un'occhiata alla questione? Mi abbia sempre per tutto di Lei devoto e affezionato.

Q. Sella

⁷ La lettera si data con la risposta di Genocchi cfr. n° II.

⁸ Paolo di Saint Robert (1815-1880); si interessò di meccanica e termodinamica.

⁹ La lettera allegata di Saint Robert non si è conservata.

2

QUINTINO SELLA AD ANGELO GENOCCHI

[Torino?], 7/6/63

Caro Collega

Vi ringrazio del *Bullettino*¹, è una pubblicazione interessantissima.

¹ Si tratta del *Bullettino meteorologico*.

Nel mandarvela [*sic*; ma probabilmente 'mandarmela'] osservo che mancano alcuni numeri.

Ma li avrei perduti io? Non sarebbe impossibile giacché comunicai la raccolta a qualche amico ed alcun numero potrebbe essere rimasto per via.

Però in questo caso ditemi i numeri che vi avessi perduti onde ve li faccia venire, giacché ho per me in orrore le opere incomplete, e lo stesso orrore ho anche per gli altri.

Addio

Il vostro amico.

Q. Sella

3

QUINTINO SELLA AD ANGELO GENOCCHI

Torino 30 ottobre 1863

Caro Collega

Vi ringrazio dei rendiconti¹ dell'accademia napoletana che mi mandate.

Oltre al N° 3, che già altre volte mi avevate mandato, manca il N° 5 (Mese di **S**ettembre). Quando potrete mi farete piacere di inviarmi anche questo.

Aspetto da Roma i fascicoli del giornale meteorologico, che vi debbo restituire. Credo **d**i averli fra pochi giorni. Addio.

Il vostro aff.^{mo} collega Q. Sella

¹ **S**i tratta del Rendiconto della Reale Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli.

4

QUINTINO SELLA AD ANGELO GENOCCHI

Roma 28/1/74

Preg.^{mo} Collega

Un rigo solo per dire che parlando della dignità Senatoria io alludevo al fatto che il Senato **n**ell'applicare l'Art. 33 dello Statuto¹ ove si dichiarano eleggibili i membri della

¹ **D**ovrebbe trattarsi dello statuto Reale dei Lincei che si andava a riformare passando dalla forma di un'associazione a carattere locale a quella di un'associazione a carattere nazionale, con l'aggiunta di una classe di scienze morali.

regia Acc.^{mia} delle Scienze dopo 7 anni di nomina ritenne doversi esso riferire alle sole Accademie i cui membri sono approvati con R^e decreto.

V^o. dev.^{mo}

Q. Sella

5

QUINTINO SELLA AD ANGELO GENOCCHI

Roma 23/12/74

Pregiatissimo collega

Brioschi¹ vi scriverà sulla riunione dei XL² coi Lincei³ pur mantenendo alla Accademia riunita tutto il carattere della attuale società italiana.

Sarebbe vantaggioso per le Scienze ed utile per gli scienziati che quando vanno alla Capitale vi trovino una casa nella quale siano in famiglia.

Se io non sbaglio nelle attuali condizioni d'Italia ciò può essere assai utile sotto ogni punto di vista.

Ond'è che agli uffici del Brioschi mi sono permesso di aggiungere anche i miei presso di voi e di qualche altro amico⁴.

Gradite i migliori auguri e saluti

Dal vostro devotissimo

Q. Sella

¹ Francesco Brioschi (1824-1897); fu fondatore e direttore del Politecnico di Milano e fu segretario generale del ministero della Pubblica istruzione dal 1861 al 1862.

² Si tratta della Società Italiana delle Scienze detta anche dei XL fondata nel 1785 da Anton Maria Lorgna (1735-1796). Sulla sua storia si può consultare G. Penso *Scienziati italiani e unità d'Italia. Storia dell'Accademia Nazionale dei XL*, Roma, Bardi 1978.

Fu presieduta dal Brioschi dal 1868 al 1874.

³ Si tratta della Reale Accademia dei Lincei.

⁴ L'intera lettera, le successive dell'anno 1875 e le correlate di Genocchi riguardano lo statuto dell'Accademia dei Lincei e il tentativo di fusione di quest'ultima con la Società Italiana delle Scienze. Lo statuto risale al 14 febbraio 1875

QUINTINO SELLA AD ANGELO GENOCCHI

Roma 10/1/75

Pregiatissimo Collega.

Veramente non mi pare che alla società dei XL¹ si debba applicare il *sint ut sunt aut not sint*². Essa mi sembra capace di trasformazione come tutti gli organismi vitali.

Per mio conto non amo però le pressioni e non vi nascondo che vista la vostra opposizione e quella di Bellavitis³, cui suppongo che altri terranno dietro fin al Ministero della pubblica istruzione onde pregare perché se vi ha un certo numero di oppositori quand'anche in minoranza, si lasci stare i XL come sono, e si faccia la trasformazione dei soli Lincei⁴ [*sic*]. Non vi nascondo però che mi dorrò che i XL si rifiutino di offrire la bandiera sotto cui raccogliere in Roma una accademia nazionale anziché locale.

Gradite un cordiale saluto

Dal vostro devotissimo

Q. Sella

¹ Si tratta della Società Italiana delle Scienze detta anche dei XL intorno alla quale cfr. n°5 n. 2

² Si tratta della pretesa risposta di padre Lorenzo Ricci, ultimo generale dei Gesuiti al papa che lo sollecitava ad una riforma della Compagnia.

³ Giusto Bellavitis (1803-1880); fu professore prima di geometria descrittiva, poi di algebra complementare a Padova.

⁴ Si tratta della Reale Accademia dei Lincei.

QUINTINO SELLA AD ANGELO GENOCCHI

Roma 18/1/75

Pregiatiss°. Collega.

Dalle vostre lettere vedo che il progetto di fusione altamente vi dispiacque. Verrei meno alla reputazione di lealtà in cui sono presso di Voi, e che desidero grandemente mantenere, se non assumessi la parte di responsabilità che mi spetta.

Mi trovo ad essere l'autore del concetto di estendere i Lincei alle scienze morali. Quando fui eletto Presidente diedi un pranzo, ed invitai non solo i Lincei¹ ma parecchi dotti dell'una dell'altra classe che sono nel Parlamento, e levai l'*annesso* brindisi. Mi parve sempre singolare che in Roma non vi fosse Accademia di scienze storiche, filosofiche, filologiche ecc., ed ho la sfortuna di credere che il metodo delle scienze positive (l'osservazione e l'esperienza) debba andarsi estendendo anche alle morali ecc., e che perciò giovi riunire in convegni i rappresentanti di queste scienze. L'antico concetto della unità scientifica che si incarnava nelle Università, oggi che queste debbono per necessità di cose spegnersi in laboratori, musei, ospedali osservatori ecc. sembrami possa tenersi vivo nelle Accademie.

Ma io confesso che ai XL² non pensavo. Mio scopo era di chiamare l'attenzione degli uomini politici sul concetto della *ampliamento* dell'Accademia Lincea, e di pregarli ad accordare i mezzi opportuni.

Il concetto piacque. Nel frattempo il Brioschi³ *tuttora* legittimo Presidente (nell'aprile o nel maggio del 1874) mi parlò della fusione. Il concetto parve giusto a me e agli altri XL che erano qui, e quando venne un Ministro della pubblica istruzione (si aveva allora solo un'interinale) si fece quello che sapete.

Ho altro difetto essenziale: quello di non sapere di legale. Ma vi confesso che io ho sempre creduto potersi le opere pie trasformare senza perdere di vista lo scopo del fondatore. Io vedo che la legge sulle opere pie soggette alla tutela della deputazione provinciale possono modificarsi [*sic*], e la legge stabilisce le molte cautele che occorrono, cioè voto del Consiglio comunale, dell'opera, della deputazione provinciale, del Consiglio di stato.

¹ Si tratta dei membri della Reale Accademia dei Lincei. Il banchetto, cui si fa cenno si tenne il 22 marzo 1874, subito dopo l'elezione di Sella a presidente dell'Accademia. La copia del testo del brindisi annesso a questa lettera inviata a Genocchi non si è conservata. Tuttavia il discorso è riportato in Q. Sella *Discorsi parlamentari di Quintino Sella raccolti e pubblicati per deliberazione della Camera dei Deputati* Roma, Tipografia della Camera dei Deputati v. I 1887; v. II 1888; v. III 1888; v. IV 1889; v. V 1890; v. I pp. 805-812, mentre ampi stralci sono riportati in G. Quazza *L'utopia di Quintino Sella*, cit. in *Cenni biobibliografici, Quintino Sella*. Vale la pena di segnalare che al banchetto partecipò Marco Minoghetto, allora presidente del Consiglio.

² Si tratta della Società Italiana delle Scienze detta dei XL intorno alla quale cfr. n°5 n.2.

³ Francesco Brioschi; cfr. n° 5 n. 2.

Vi sono altri corpi morali soggetti alla sovrintendenza del governo e sono specialmente le opere d'istruzione pubblica. Ho sempre udito che anche queste si potevano trasformare sentendo l'opera ed il Consiglio di Stato. E so per qualche caso che udii in Consiglio dei Ministri essere il Consiglio di stato difficilissimo ad ammettere codeste trasformazioni, ed io non credo che fu né sia mai fatta alcuna senza parere favorevole del Consiglio di Stato.

Vi son certo delle libere associazioni sulle quali non vi ha sorveglianza né della deputazione provinciale, né dello Stato (all'infuori di ciò che prescrivono le leggi di sicurezza pubblica o leggi speciali) ma esse non furono erette in corpi morali. Ed in questo caso di corpo morale soggetto alla sorveglianza del Ministero della Pubbl. Ist. io ho sempre creduto che fosse la serietà dei XL la quale ha personalità giuridica, possiede ecc. e non è certo una delle società regolate dal Codice di Commercio o simili.

Quindi nel mio concetto l'ultimo articolo del progetto aveva appunto questo effetto di mantenere l'Accademia fusa (o confusa come certo voi direste) col carattere di corpo morale autonomo, e di distinguerla da una pura e semplice istituzione governativa che il Governo può mutare senza sentire l'opera stessa.

Ed anzi io ero tanto in codesto ordine di idee che a malincuore scrissi nel progetto l'articolo che richiedeva l'approvazione governativa dei soci eletti. Il feci perché mi si disse essere ciò condizione alla eleggibilità senatoria.

Ma del resto le sono discussioni ormai inutili. Siete contrari *Voi*, *Bellavitis*⁴, *Bufalini*⁵ Mi si dice contrario il *Turazza*⁶, il *Lombardini*⁷. Mi immagino lo siano il *Secchi*⁸ il *Chelini*⁹.

Mi immagino che altri ancora <...> con voi. Si arriva ad una minoranza ragguardevole, e non si può altro, che la trasformazione dei Lincei.

E quanto a me non mi dorrò niente del risultato.

⁴ Giusto Bellavitis; cfr. n°6 n. 3.

⁵ Maurizio Bufalini (1787-1875), professore di clinica medica a Bologna e in seguito a Firenze.

⁶ Domenico Turazza (1813-1892); professore di geometria descrittiva prima, geodesia e idraulica poi all'Università di Padova.

⁷ Elia Lombardini (1794-1878); ingegnere, fu uno dei massimi esperti di idraulica dell'epoca.

⁸ Angelo Secchi (1815-1878); fu un celebre astronomo.

⁹ Domenico Chelini (1802-1878); frate dell'ordine degli Scolopi e professore a Bologna fu destituito il 18 dicembre 1864 per aver rifiutato di prestare giuramento politico.

Trasformare i Lincei in guisa da dare loro costituzione nazionale anziché locale non era possibile senza interpellare i XL, sicché il Lorgna¹⁰ aveva attuato il concetto da un secolo. Se i XL non ne hanno voglia, o solo un certo numero di essi non ne ha voglia, certo nessuno potrà dolersi della analogia di costituzione che si darà alla accademia della Capitale sebbene non riunita ai XL.

Anche più lieto io sarò poi se Voi e gli altri oppositori vorrete credere quale fu, cioè sincera sincerissima la deferenza ai XL, e la intenzione di non fare ombra di pressione o di violenza. Sarà stata questa una delle divergenze di opinioni come sempre ci sono tra gli uomini specialmente liberi, ma ciò non deve togliere la stima reciproca, ed al comune collaborare anche per vie diverse al progresso delle scienze.

Né diverso fu il proposito del Betti¹¹ e del Brioschi. Gradite una cordiale stretta di mano dal vostro devotissimo

Q. Sella

¹⁰ Anton Maria Lorgna; cfr. n° 5 n. 2.

¹¹ Enrico Betti (1823-1892); insegnò Analisi e Geometria Superiore, poi Fisica matematica all'Università di Pisa. Fu segretario generale del ministero della Pubblica istruzione dal 1874 al 1876.

8

QUINTINO SELLA AD ANGELO GENOCCHI

Roma 15/2/75

Pregiatissimo Collega.

Fallita la fusione dei Lincei¹ coi XL², il Governo si limitò a modificare lo statuto dei Lincei secondo lo schema che conoscete. Il numero di soci venne quindi elevato da 30 a 40: i soci possono non risiedere a Roma: concorrono anche gli assenti come i presenti alle elezioni: solo la nomina dei primi 10 che portano i Lincei da 30 a 40 si fa dai residenti in Roma colle nomine dell'attuale Statuto.

Questa nomina fu fatta jeri e voi siete fra i dieci nominati (sono gli altri nove Bufalini³, Casorati⁴, Cornalia⁵, Felici⁶, Gastaldi⁷, Meneghini⁸, Parlatore⁹, Schiaparelli¹⁰,

¹ Si tratta della Reale Accademia dei Lincei.

² Si tratta della Società Italiana delle Scienze detta anche dei XL intorno alla quale cfr. n°5 n. 2

³ Maurizio Bufalini cfr n°7 n.5.

Turazza¹¹ ed erano già stati nominati per completare i 30 antichi Lincei Betti¹², Scacchi¹³, de Gasparis¹⁴).

Ora prima di fare i passi opportuni per l'approvazione sovrana io devo chiedervi se accettate la vostra nomina.

Io confido che non solo accetterete, ma ci manderete delle belle memorie vostre.

Sempre vostro devotissimo

Q. Sella

⁴ Felice Casorati (1835-1890), professore di Calcolo infinitesimale dell'Università di Pavia

⁵ Emilio Cornalia (1824-1882), naturalista, direttore del Museo civico di Milano.

⁶ Riccardo Felici (1819-1902); insegnò fisica all'Università di Pisa.

⁷ Bartolomeo Gastaldi (1818-1879); fu professore di Mineralogia e Geologia alla Scuola d'ingegneria di Torino.

⁸ Giuseppe Giovanni Antonio Meneghini (1811-1889); fu professore di fisica, chimica e botanica a Padova, di geologia e mineralogia a Pisa.

⁹ Filippo Parlatore (1816-1877); fu professore di botanica a Firenze.

¹⁰ Giovanni Virgilio Schiaparelli (1835-1910); fu un celebre astronomo, molto noto per la scoperta dei cosiddetti "canali di Marte".

¹¹ Domenico Turazza; cfr n° 7 n. 6.

¹² Enrico Betti; cfr. n° 7 n. 9.

¹³ Arcangelo Scacchi (1810-1893) professore di Mineralogia all'Università di Napoli e dal 1875 presidente della Società Italiana delle Scienze.

¹⁴ Annibale De Gasparis (1819-1892); fu un celebre astronomo e professore di astronomia all'Università di Napoli.

9

QUINTINO SELLA AD ANGELO GENOCCHI

Roma 20 Febbraio 1875

Pregiatissimo Collega

Avrò cura di farvi mandare presto il novello statuto. Spero che un sentimento di convenienza verso coloro che credettero di *onorarvi* vi muoverà a rispondere presto e definitivamente.

Mi duole infinitamente trovare nella vostra lettera una grave calunnia lanciata contro uno degli uomini i più *intemerati*. Tutti coloro che conoscono lo Scacchi¹ sanno che la sua vita è una delle più nobili, e che egli non volle mai incarichi lucrosi i quali lo distraessero dalla scienza. Tutti quelli che gli parlarono di questa *faccenda della fusione* dei XL² coi Lincei³ sanno che il suo pensiero era questo: *giova grandemente procurare* le riunioni dei membri di una società italiana, ma perché essi veramente si muovano occorre almeno indennizzarli della spesa che devono sostenere per venire a Roma, cioè il rimborso del viaggio ed un cospicuo gettone giacché il solo rimborso della *ferrovia* non indennizza la spesa.

Cosicch  io direi:   davvero molto basso il *diapason morale* in Italia se colleghi calunniano i colleghi per un concetto certo non ignobile come questo.

Ma siccome io soglio non pensare male leggermente voglio credere che una buona dose di umore atrabiliare da un lato, ed una frase infelice dall'altra astutamente messa in rilievo dal Marianini⁴ accanto ad una protesta che mi dicono *immaginaria del Casorati*⁵ e del Cornalia⁶, vi abbiano indotto ad un giudizio cos  stranamente lontano dal vero.

In tal caso ne sono certo vi affretterete a disdire cosifatto giudizio se l'avete emesso presso altri. E vostro *rimorso* per l'ingiusto pensiero che aveste sia l'aver nociuto alla candidatura dello Scacchi con un mezzo che certo non pu  essere nel vostro carattere. Sia vostro rimorso che il *calomnier toujours* abbia lasciato qualcosa.

Troverete che mi *commuove* ed infatti mi fa male il vedere cos  *atroce* ingiustizia verso persone cos  altamente rispettabili.

Vostro devotissimo

Q. Sella

¹ Arcangelo Scacchi; cfr. n  8 n. 13.

² Si tratta della Societ  Italiana delle Scienze detta dei XL intorno alla quale cfr. n  5 n. 2.

³ Si tratta della Reale Accademia dei Lincei.

⁴ Pietro Domenico Marianini (1827-1884); segretario della Societ  Italiana delle Scienze fino al 1875 quando fu sostituito da Cremona.

⁵ Felice Casorati (1835-1890); cfr. n  8 n. 4.

⁶ Emilio Cornalia; cfr. n  8 n. 5.

QUINTINO SELLA AD ANGELO GENOCCHI

Roma 18/4/75

Pregiatissimo Collega

Finalmente, ho ricevuto l'avviso che fu fatto il R. decreto che approva la vostra nomina a socio dell'Accademia. Riceverete la partecipazione ufficiale ed una copia dello Statuto.

Rimasi gran tempo senza rispondervi. Lealmente vi confesserò mi avevate messo di cattivo umore.

Non era da voi che io aspettavo così viva opposizione alla creazione dell'Accademia nazionale. Mi ero anzi figurato che ne sareste stato uno dei più caldi propugnatori!!! Capirete quindi come sia stata grande la mia disillusione, e vi confesserò che il mio dispiacere fu tanto più grande quanto maggiore è il valore che vi attribuisco.

Vi dirò poi che oltre al malumore ci fu una serie di incidenti che tardarono le mie risposte.

Vi promettevo la spedizione sollecita dello statuto, onde poteste decidervi. Mi giunse una prima copia con gravi sbagli. Corro al Ministero per la rettificazione e chieggo mi si rimandino le bozze. Ma il Ministero di Grazia e Giustizia cui spetta la pubblicazione delle leggi e dei decreti non le rimanda alla pubblica istruzione, sicché, infatti vennero fuori due errori che si dovettero correggere, e fu omissa il *Visto le deliberazioni dell'Accademia*¹ che si doveva anteporre allo Statuto.

E così voi leggeste lo Statuto nella Gazzetta Ufficiale prima che io ne avessi copia autentica.

Appena avuta la vostra accettazione scrissi sollecitando il Decreto di approvazione della nomina. Ma il Bonghi² ed il Betti³ furono assenti durante porzione delle ferie parlamentari: inoltre si dovette rifare il decreto che diceva (dapprima) è approvata la nomina ... Senza dire chi avesse fatta la nomina.

¹ Si tratta della Reale Accademia dei Lincei

² Ruggiero Bonghi (1826-1895); fu professore di greco a Torino; indi passò a Firenze, Milano, Roma come professore di storia antica, moderna e di letteratura latina; fu ministro della Pubblica Istruzione dal 1874 al 1876.

³ Enrico Betti; cfr. n° 7 n. 9.

Finalmente io fui queste ultime due settimane sequestrato dallo studio delle casse di risparmio alla Camera.

Ma lasciamo stare il passato. Quel che è stato è stato, e le divergenze che furono non devono togliere nulla alle nostre buone relazioni.

Io vi stringo cordialmente la mano, e voi.... vendicatevi di me mandandomi una bella memoria per l'Accademia dei Lincei. Mi fareste proprio un grande favore.

Con tutta stima

Vostro devotissimo

Q. Sella

11

QUINTINO SELLA AD ANGELO GENOCCHI

Roma 5/2/76

Caro Collega.

Rispondo tardi perché ho molto a fare.

Grazie delle congratulazioni. Il certo sì è che la presidenza dei Lincei¹ mi fa perdere un tempo veramente enorme.

Si mandò il volume a tutti i corrispondenti, sebbene siano pochissime le Accademie che il facciano.

Ditemi il nome di chi si lagnò con voi. Deve esserci stato un disguido.

Il nuovo volume sarà diviso in tre parti. *Chi lo vorrà trino separato il separerà, e chi lo vorrà trino* ed uno si servirà a suo gusto.

Vi fu nel Vol.^o scorso qualcosa che non vi piacque? In tutte le Accademie sempre accadde e sempre accadrà che vi siano obiezioni a fare. Ma io profitto dell'occasione per domandarvi qualche lavoro. Non siete per bacco tra coloro che valgono solo a criticare. Valetе per dieci a fare ed a fare ottimamente. Mandatemi adunque un bel lavoro.

Sarà un regalo grande per tutti, e grandissimo per me, che lo avrò molto a cuore.

Valetе. Vostro affettuoso

Q. Sella

¹ Si tratta della Reale Accademia dei Lincei.

QUINTINO SELLA AD ANGELO GENOCCHI

Roma 29/4/77

Egregio Collega.

Grazie molto dell'aiuto che mi deste. Quel balordo di computista dell'Acc.^{mia} il quale sovrintende alle spedizioni del volume ai soci non aveva ancora fatta la spedizione ai non residenti in Roma. La fu una negligenza che trovai così grande e rilevai in tali termini, che spero non si rinnoverà. Il poveretto aveva nientemeno che scordato i soci che sono i padroni !!!

Grazie ancora della vostra nota sulla pubblicazione del Boncompagni². Aspetto con vivo desiderio ciò che ci manderete, e per la copia in se, e per il valore morale, per me grandissimo, di un benigno suffragio e di un atto di incoraggiamento per l'Accademia il quale provenga da un uomo del vostro valore. Gradite i più cordiali saluti.

Dal vostro aff.^{mo}, Q.Sella.

¹ Si tratta della Reale Accademia dei Lincei.

² Baldassarre Boncompagni (1821-1894).

La nota cui si fa riferimento fu pubblicata sul *Bullettino* del Boncompagni e potrebbe trattarsi di A. Genocchi *Sopra la pubblicazione fatta da B. Boncompagni di undici lettere di Luigi Lagrange a Leonardo Eulero. Osservazioni di Angelo Genocchi*. "Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche". v. X (1877), pg. 657-667.

Genocchi ebbe sempre stretto rapporto col Boncompagni (si conservano circa un migliaio di lettere scambiate tra loro, divise tra la biblioteca Passerini Landi di Piacenza e la biblioteca del Dipartimento di Matematica 'G. Castelnuovo' dell'Università di Roma 'La Sapienza').

QUINTINO SELLA AD ANGELO GENOCCHI

Confidenziale

Biella 8 Nov. 1880

Chiarissimo Collega

I soci dell'Accademia dei Lincei presenti in Roma, considerato l'atto munificentissimo con cui S.M. il Re assegnava sulla sua cassetta privata l'annua somma

di lire 20.000, perché l'Accademia potesse conferire due premi¹ di lire 10.000 ciascuno ai migliori lavori scientifici *che le fossero presentati*, deliberarono di manifestare la loro gratitudine con qualche segno eterno e duraturo.

Essi pensarono quindi alla erezione di un modesto busto nelle aule accademiche, il cui pregio morale consistesse nella universalità della sottoscrizione tra gli accademici.

Il busto è ormai terminato, sicché lo si potrà inaugurare in una delle prossime sedute.

Hanno concorso alla sottoscrizione tutti i soci e corrispondenti nazionali ad eccezione di alcuni pochissimi tra cui la S. V. Chia.^{ma}, a cui temo non sia giunto l'avviso della sottoscrizione iniziata, o sia esso passato di memoria.

Io credo di farle cosa *graditissima* avvertendola e della sottoscrizione e del fatto che è per scadere il tempo utile per concorrervi. Forse Ella gradisce pure di sapere che appena qualcuno sottoscrive per £ 15, il maggior numero per £ 10, e pochi per £ 5. Ma non è l'entità della sottoscrizione che importi ciò che interessa è la universalità della sottoscrizione fra gli Accademici.

Gradisca i fraterni saluti

Dal suo devotissimo Collega

Q. Sella

¹ Si tratta dei famosi premi "reali", assegnati dalla Reale Accademia dei Lincei.

Biella 26 Nov. 82

Egregio Collega

La mia circolare diceva che le schede dovevano essermi trasmesse non più tardi del 24 Novembre. Tuttavia non ne ho il licenziai lo spoglio che oggi. Quand'ecco la posta di stasera mi porta la vostra scheda. Sono quindi assai dolente che essa mi sia giunta troppo tardi.

Ma fui però lietissimo di riceverla giacché essa mi prova che siete in buona salute; mentre quando fui nei giorni scorsi a Torino mi era stato detto che per una caduta non eravate bene¹.

Appié della vostra scheda vi è la domanda se la vostra scheda precedente sia giunta. Sebbene le schede dopo il loro spoglio si brucino, siccome tengo nota dei votanti ho potuto riconoscere che voi non figurate tra questi.

La vostra scheda se l'avete spedita non mi è quindi giunta.

Mi sorprende un po' questo smarrimento giacché simili missive colla soprascritta stampati non sono facili a confondersi e quindi a smarrirsi.

Gradite il più cordiale saluto del vostro aff.^{mo}

Q. Sella

¹ In effetti Genocchi, ormai indebolito nella vista urtò, nel settembre del 1882, contro un palo e si fratturò una rotula. Rimase immobilizzato per molti mesi. Riprese l'insegnamento universitario solo nel marzo del 1884. Sulla questione cfr. H. C. Kennedy *Peano. Storia di un matematico*. Torino, Boringhieri, 1983.

QUINTINO SELLA AD ANGELO GENOCCHI

Biella 11. 10. 83

Caro Genocchi

Domani sarò a Torino, ma temendo di non aver tempo a venirvi a vedere, senza indugio vi scrivo, salvo a passare da voi onde parlarvi se ho un momento disponibile.

Analizzo in pochissime parole le vostre obiezioni.

- *Numero degli stranieri*. L'aumento fu reclamato dai matematici e dai fisici, con molto calore. Il più caldo era Cremona¹ e poi il Blaserna² ed altri. Le relazioni molteplici fra gli Istituti di scienze fisiche rendono opportuna l'aggregazione di parecchi stranieri, mentre le scienze morali sono sotto questo aspetto in diversa condizione. Ed ecco perché fu deliberato l'aumento dei soci della classe di scienze fisiche, e fu ammesso

¹ Luigi Cremona (1830-1903); fu il fondatore della scuola geometrica italiana.

Per i suoi rapporti con il Genocchi cfr. L. Carbone- R. Gatto- F. Palladino *L'epistolario Cremona Genocchi* cit. in *Cenni biografici, Angelo Genocchi*.

² Pietro Blaserna (1836-1918); insegnò fisica prima all'Università di Palermo, poi a quella di Roma.

senza contrasto dai soci della classe di scienze morali; e senza che lo reclamassero per sé. Le obiezioni contro l'aumento degli stranieri furono pochissime per lettera. Tra i soci presenti alle sedute nessuno obiettò contro, sicché se senso comune dovesse definirsi quello della comunità, converrebbe dire che in questo caso fu per l'aumento.

-Dimissioni del Presidente. Era naturale che non potendo sostenere presso il Governo la risoluzione dell'Accademia io ponessi questa in condizione di trovare altro capo che la difendesse. D'altronde era anche un dovere sotto un altro punto di vista.

- A voi pare che il Governo non possa modificare le risoluzioni dell'Accademia. Credo che siete lungi dal vero. L'antica Accademia dei Lincei era un istituto di creazione governativa, di cui il governo poteva modificare a suo talento gli istituti, e mi pareva fare un grande passo in favore dell'autonomia dell'Accademia ottenendo l'art. 39 dello statuto precedente. Questo articolo diede luogo ad osservazioni nel Consiglio di stato, che mi furono comunicate in via ufficiosa ma riuscii a dissipare le difficoltà fatte e venne ammesso. Ora questo articolo dice: *le mutazioni a questo Statuto saranno fatte dopo udita l'accademia, la quale viene riconosciuta e dichiarata corpo morale autonomo, ed il Consiglio di Stato*. Ciò vuol dire che il Governo è obbligato di sentire l'Accademia ed il Consiglio di Stato, ma non gli è punto tolta la facoltà per andare al caso estremo, di adottare una modificazione agli statuti, che non solo l'Accademia ma anche il Consiglio di Stato non giudicassero opportuni. Tale sarebbe il *summum jus*. Sicuramente non nego che sarebbe prossimo alla *summa injuria*³.

Nel caso attuale la riunione della Patologia alla Fisiologia venne ammessa dall'Accademia a debolissima maggioranza, ed il Consiglio di Stato fu d'avviso che a meglio garantire la rappresentanza dell'una e dell'altra fosse meglio separarle. Sicché siamo lontanissimi dal caso estremo che per pura ipotesi io consideravo.

Considerate d'altronde mio caro Genocchi quanto sarebbe difficile il sostenere che il Governo non abbia altro diritto che quello di veto in un istituto che si regge coi mezzi che esso gli procura sul bilancio dello stato. Neppure nelle opere pie di fondazione intieramente privata, alle quali lo Stato non dà un obolo del suo, il Governo è dalle nostre leggi ridotto a così piccola ingerenza come quella che voi vorreste attribuirgli nell'Accademia.

³ L'espressione *summum ius, summa iniuria* era già proverbiale in età romana e come tale è riportata ad esempio in Cicerone, *de officiis* 1.10.33.

Voi mi parlate di altre accademie.

Qui non ho altro alla mano, che un annuario dell'Institut⁴, che è per caso sul mio tavolo. E' preceduto dalle leggi e dai decreti che lo riguardano. In taluni di essi decreti si parla del voto dell'Istituto, ma in parecchi non se ne fa menzione: neppure nell'ultimo del 12 luglio 1872, in cui il presidente della Repubblica⁵ abroga un decreto dell'imperatore⁶ del 1855.

Vi assicuro caro Genocchi che se avessi consigliato al Governo una offesa all'autonomia dell'Accademia al di là dei diritti imprescindibili del Governo, sarei addoloratissimo come di una grave colpa. Ma nel nostro caso ho la coscienza perfettamente tranquilla.

- Finisco con una buona notizia.

Voi parlate di opposizione dalla quale soltanto vi astenete per non aver preso parte attiva ai lavori dell'Accademia.

Non c'è bisogno di ammazzare il Presidente, mio caro Genocchi, giacché esso è bello e morto. Ai 31 dicembre scade la mia presidenza ed il 1° gennaio il governo dell'Accademia sarà affidato ad altre mani. Sicché la mia persona non deve essere di ostacolo perché voi prendiate parte attiva ai lavori dell'Accademia, come vivamente io e tutti desideriamo.

Cordialmente vi saluto⁷.

Vostro aff.^{mo}

Q. Sella

⁴ Si tratta dell'Institut de France che raccoglieva le cinque Accademie francesi; è uno dei modelli cui ci si ispirò nel momento della riorganizzazione dell'Accademia dei Lincei dopo la presa di Roma nel 1870.

⁵ Si tratta di Adolphe Thiers (1797-1877) presidente interinale della Repubblica francese.

⁶ Si tratta, naturalmente, di Napoleone III (1808-1873).

⁷ L'intera lettera è dedicata alla riforma dello statuto della Reale Accademia dei Lincei approvata con Regio Decreto del 26 luglio 1883. Anche le altre lettere del 1883 e le correlate di Genocchi vertono sullo stesso argomento.

QUINTINO SELLA AD ANGELO GENOCCHI

Novara 23 ottobre 83

Caro Genocchi

I matematici presenti alla seduta dell'Accademia dei Lincei¹ il 18 ottobre furono d'avviso, ed io consentii che si iniziasse con la elezione di 8 stranieri, sovra gli undici che sarebbero da eleggersi. Si consideri che non si debbano far mancare voti a matematici eminenti che tutti vogliono solo per il fatto che uno voglia prima il matematico A che il matematico B, ed un altro il B prima dell'A: tanto vale eleggere ad un tempo A e B.

Le terne proposte dai presenti a Roma sarebbero le seguenti

	Terna A	Terna B	Terna C	Terna D
1	Hermite ²	Tchebicheff ³	Weierstrass ⁴	Sylvester ⁵
2	N	N	N	N
3	N	N	N	N
	Terna E	Terna F	Terna G	Terna H
1	Kronecker ⁶	Schläfli ⁷	Fuchs ⁸	Lie ⁹
2	N	N	N	Klein ¹⁰
3	N	N	N	Jordan ¹¹

Ora io vi prego di mandarmi anche voi le vostre otto terne di stranieri, e se me le potete mandare prima del termine del mese mi farete piacere, onde poter coordinare queste colle altre elezioni.

¹ Si tratta della Reale Accademia dei Lincei.

² Charles Hermite (1822-1901); celebre analista francese, risolse utilizzando le funzioni ellittiche le equazioni di quinto grado.

³ Pafnutij L'vovic Cebyšev (1821-1894); celebre analista russo.

⁴ Carl Weierstrass (1815-1897); celebre analista tedesco.

⁵ James Joseph Sylvester (1814-1897); celebre algebrista inglese.

⁶ Leopold Kronecker (1823-1891); celebre algebrista tedesco.

⁷ Ludwig Schläfli (1814-1895); celebre matematico svizzero.

⁸ Lazarus Fuchs (1803-1902); celebre analista tedesco.

⁹ Sophus Lie (1842-1899); celebre algebrista norvegese.

¹⁰ Felix Klein (1849-1925); celebre geometra tedesco.

¹¹ Camille Jordan (1838-1922); celebre analista francese.

Le otto terne di matematici stranieri che ebbi dai matematici presenti a Roma e che avrei da voi come dagli altri matematici assenti costituirebbero le proposte della *Sezione*. Sopra di esse io chiederò poscia il voto della *categoria*, come il nuovo Statuto prescrive, e finalmente sulla terna proposta dalla categoria chiederò poi l'*opzione* della classe.

Ho ripensato alle vostre obiezioni imperocché tutto ciò che voi mi dite mi fa sempre gran peso, e mi dà materia a riflettere.

Quanto alla legalità del mutamento fatto dal Ministro¹² dividendo la Patologia dalla Fisiologia, non vi ha punto a dubitare. Seppi a Roma che il Cannizzaro¹³ il quale era stato il principale promotore del voto per la riunione della Patologia alla Fisiologia, ed era molto irritato per la loro posteriore separazione si rivolse al Consigliere di Stato relatore sullo statuto accademico, e questo facilmente lo convinse che se avesse mosso dubbio sulla legalità dell'operato del Ministro, avrebbe dimostrato di non avere alcuna nozione di diritto amministrativo.

Quanto ai molti stranieri ed alla loro aggregazione all'Accademia cogli stessi diritti dei nazionali quando sono in Roma, sarà effetto del cosmopolitismo innato in Roma, ma una volta che ci si è non vi si può negare diritto di patria tanto a quelli che vi cercano il Papa come a quelli che vi studiano l'antica Roma. D'altronde non è la scienza cosmopolita? Ma voi credete che allora l'Accademia cessa di essere nazionale. A me pare invece che gli eletti dall'Accademia ricevano da questo il diritto di cittadinanza per ciò che concerne l'Accademia.

Praticamente poi non temiate danno dai troppi stranieri. L'altro giorno sedeva con noi in plenum l'Helmholtz¹⁴: vi era forse da esserne dolenti? Non so se sia mai accaduto che assistesse alle sedute nostre più di due o tre stranieri, accademici o no.

Cordialmente vi saluto.

Vostro aff. Mo, Q. Sella.

¹² Guido Baccelli (1832-1916); professore di medicina legale e patologia, fondò il policlinico di Roma; fu ministro della Pubblica Istruzione dal 1880 al 1884, dal 1893 al 1896, dal 1898 al 1900.

¹³ Stanislao Cannizzaro (1826-1910); professore di chimica organica e inorganica all'Università di Palermo.

¹⁴ Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894) celebre fisiologo, fisico e matematico tedesco.

QUINTINO SELLA AD ANGELO GENOCCHI

Biella Venerdi [1883]

Caro Genocchi

Devo spiegare le mie parole.

Rammento gli ultimi anni della presidenza (Plana¹ e Sclopis²). Fin d'allora io conchiusi che le presidenze perpetue erano la morte delle Istituzioni, od almeno erano a queste assai dannose.

Ciò che pensai d'altri penso di me, ed al 31 dicembre cesserà la mia ormai troppo lunga presidenza³.

Molti colleghi mi fanno istanza per la continuazione, ma io sono irremovibile. Ed io credevo di darvi una buona notizia come questione di *principio* prescindendo da ogni particolare fiducia o benevolenza.

Prescindiamo dalla mia persona che non ha competenza nella questione fisiologia patologica. Ma il Baccelli⁴ non vi pare che l'abbia?

Mi parlate di smacco all'Accademia. Caro Genocchi voi mi insegnate che non si fa torto ad altri esercitando i nostri diritti. Riflettete bene. Un governo che ottiene dal Parlamento mezzi ragguardevoli ed un grande palazzo⁵ per un'Accademia ha non solo il diritto ma il *dovere* di studiare la questione, e di avere delle convinzioni proprie sul suo ordinamento. Ed infatti lo statuto del 1875 fa al Governo obbligo di *sentire* ma non di seguire l'Accademia in tutto ciò che deliberasse.

Un giudizio acerbo vi sfugge sul nuovo Statuto che trovate *ridicolo*. Non vi pare che le altrui convinzioni meritino maggiore rispetto, e che vi sia troppa presunzione nell'attribuire tutto il senno a Voi, e nel negarlo agli altri? Quindi io rispetto altamente la vostra convinzione sebbene contraria alla mia in questi punti dello statuto accademico, e sono sicuro che riflettendoci voi rispetterete anche le convinzioni dei vostri colleghi che la pensavano e pensano diversamente da voi.

¹ Giovanni Plana (1781-1864); fu professore di Astronomia all'Università di Torino, fu inoltre presidente dal 1851 fino alla morte dell'Accademia delle Scienze di Torino.

² Federico Paolo Sclopis (1798-1878); fu storico del diritto.

³ Si tratta naturalmente della presidenza della Reale Accademia dei Lincei. In realtà Sella fu rieletto.

⁴ Guido Baccelli; cfr. n°16 n. 12.

⁵ Il 19 maggio 1883 Sella aveva firmato a coronamento di un forte impegno come rappresentante del ministro della Pubblica istruzione Guido Baccelli il contratto d'acquisto di Palazzo Corsini in via della Lorengana destinato ad essere sede dell'Accademia dei Lincei.

Sempre e cordialmente

Vostro aff.^{mo}, Q. Sella⁶

⁶ La lettera precede quella di Genocchi a Sella del 28 ottobre 1883 (cfr. n° XXIII) nella quale vengono menzionati alcuni passi di essa.

18

QUINTINO SELLA AD ANGELO GENOCCHI

Biella 29. 10. 83

Mio caro Genocchi

Rispetto alla fisiologia ed alla patologia potrei difendermi dall'accusa di presunzione osservando che la separazione

1. fu proposta di proprio impulso da un fisiologo, dal Mosso¹
2. fu ammessa da una Commissione nella quale vi erano fisiologi e patologi
3. fu combattuta in Accademia dal Cannizzaro² che non è né fisiologo né patologo
4. fu deliberata da una maggioranza di soli due voti.
5. fu ammessa da un Ministro³ che è patologo.

Potrei notare ancora che dichiarai di non poter difendere presso il governo questa separazione, e che quindi rassegnavo le mie dimissioni da Presidente. L'Accademia⁴ non le volle accettare, e siccome sicuramente non pensò ad impormi un mutamento di opinione, mi diede libertà di sostenere ciò che pensavo in proposito.

Ma sia tutto ciò che voi volete per ciò che mi concerne.

Potete accusarmi di presunzione e d'aver fatto cosa ridicola.

Da un pezzo so le conseguenze del potere. Uno si sacrifica per fare ciò che crede il bene, e ne riporta le critiche le più acerbe.

Non è quindi per conto mio che torno tante volte alla questione, ma per un alto sentimento di dovere. Abbandono intieramente la mia persona ad ogni giudizio dei miei colleghi, ma non devo lasciar vilipendere i colleghi miei finché ne sono il Presidente. Vi assicuro mio caro Genocchi, che se altri accusasse voi di aver fatto cosa ridicola

¹ Angelo Mosso (1846-1910); insegnò fisiologia all'Università di Roma.

² Stanislao Cannizzaro; cfr. n° 16 n. 13.

³ Guido Baccelli; cfr. n° 16 n. 12

⁴ Si tratta della Reale Accademia dei Lincei.

proponendo e votando in coscienza una mutazione nello statuto, che voi giudicaste consigliato da seri motivi, io prenderei le vostre difese anche quando io dissentissi da voi. Si può avere una opinione diversa, ma non si ha il diritto di accusare di ridicolo gli altri, che sono in questo caso la quasi unanimità dei colleghi.

Infatti salvo voi e se non erro lo Scacchi⁵, tutti apprezzarono l'aumento dei soci stranieri, e parecchi fecero in questo senso le più vive istanze.

Accontentatevi adunque mio caro Genocchi di trattare me come credete che lo meriti, ma rispettate ve ne prego i colleghi nella libera manifestazione della loro opinione. E scusatemi se vi importuno ripetutamente sovra tutto ciò, giacché il solo sentimento del dovere mi costringe a continuare una corrispondenza poco piacevole. E riflettete sempre che farei altrettanto se invece di accusatore foste voi l'accusato.

Malgrado tutto son sempre vostro aff. mo amico.

Q. Sella

⁵ Arcangelo Scacchi; cfr. n° 8 n. 16.

QUINTINO SELLA AD ANGELO GENOCCHI

Biella 20/11/83

Caro Amico

Molte grazie della lieta notizia che mi date, e che permette di continuare tranquillamente fino alla fine l'elezione dell'illustre Hermite¹. Il Perrier² che vidi a Roma fu quello che mi fece dubitare, indi la interrogazione mossagli.

Quando avrete occasione di scrivergli ricordategli che abbiamo a socio dell'Accademia³ un Cardinale, l'Haynald⁴ col quale sono anche in corrispondenza personale, e che segue il movimento dell'accademia.

¹ Charles Hermite; cfr. n° 16 n. 2. Probabilmente Sella temeva che Hermite, fervente cattolico potesse non accettare la nomina a membro dell'Accademia dei Lincei. In effetti dalla caduta di Roma nel 1870 vi furono due Accademie che si rifacevano a quella preunitaria l'una pontificia, l'altra legata allo Stato italiano. Per quest'ultima Hermite poteva temere un orientamento anticlericale.

² François Perrier (1833-1888) geodeta e ufficiale francese.

³ Si tratta della Reale Accademia dei Lincei.

⁴ Lajos Haynald (1816-1891) naturalista ungherese e cardinale; la sua vasta raccolta di piante e libri è ora parte del Museo Nazionale Ungherese.

Ditegli poi che è veramente cortese con me ricordando una delle più simpatiche figure ed uno dei miei più cari amici l'Enrico S. Claire Deville⁵.

Cordialmente

Vostro aff.^{mo}, Q. Sella

⁵ Henry Sainte-claire Deville (1818-1881) chimico francese fratello del geologo Charles (1814-1876), anch'egli ben noto a Sella.

4. LETTERE DI ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

I

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

Torino 4 ottobre 1851

Stimat. mo Signor Cavaliere.

Il prof. Ferrati¹ ed io La preghiamo a trovarsi domani alle ore 11 $\frac{3}{4}$ in codesto Istituto tecnico dove ci recheremo entrambi per conferire con Lei.

Spero che se le sue occupazioni non glielo vietaranno, Ella vorrà farci questo favore ed ho intanto il bene di confermarmi
di V. S. Ills.^{ma}

Devoto Serv.^{re}, Angelo Genocchi

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Carteggio, fascicolo Genocchi Angelo.

¹ Camillo Ferrati (1822-1888), professore di geodesia all'Università di Torino. Fu segretario generale del ministero di Pubblica Istruzione dal 1876 al 1878.

II

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

Torino 21 febbraio 1860

Stimatiss. mo Signor Cavaliere.

Duolmi di non poter dare risposta soddisfacente alle domande del Signor Conte di S. Robert¹. Ignoro dove si possano trovare le tavole calcolate dallo Spencer le quali io mai

¹ Paolo di Saint Robert; cfr. n° 1 n. 2.

non vidi. Né ho saputo ridurre ad alcune dei trascendenti di cui si hanno tavole a me note, l'integrale $\int d\varphi \arctan(\tan \delta \cos \varphi)$: solamente posso indicare un modo di determinare il valore per serie.

Chiamo V quest'integrale, e pongo $\tan \psi \cos \varphi = \tan x$, $\frac{d\psi \cos \varphi}{\cos^2 \psi} = \frac{dx}{\cos^2 x}$, donde

$$dx = \frac{d\psi \cos \varphi}{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \psi}; \text{ ne deduco}$$

$$\arctan(\tan \delta \cos \psi) = \int_0^\delta \frac{d\psi \cos \varphi}{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \psi},$$

$$V = \int_0^\delta d\psi \int_0^\alpha \frac{d\varphi \cos \varphi}{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \psi} = \frac{1}{2} \int_0^\delta \frac{d\psi}{\sin \psi} \log \frac{1 + \sin \alpha \sin \psi}{1 - \sin \alpha \sin \psi}$$

e ponendo $\tan \frac{1}{2} \psi = z$, $\tan \frac{1}{2} \delta = c$, trasformo quest'espressione in

$$V = \frac{1}{2} \int_0^c \frac{dz}{z} \log \frac{1 + z^2 + 2z \sin \alpha}{1 + z^2 - 2z \sin \alpha}.$$

Sia $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, e però $\sin \alpha = \cos \beta$; supponiamo $c < 1$ e quindi $z < 1$: si avrà in serie

convergente

$$\frac{1}{2} \log \frac{1 + z^2 + 2z \cos \beta}{1 + z^2 - 2z \cos \beta} = 2 \left(\frac{z}{1} \cos \beta + \frac{z^3}{3} \cos 3\beta + \frac{z^5}{5} \cos 5\beta + \dots \right)$$

quindi

$$V = 2 \left(\frac{c}{1} \cos \beta + \frac{c^3}{3^2} \cos 3\beta + \frac{c^5}{5^2} \cos 5\beta + \dots \right).$$

Se c fosse > 1 , si spezzerebbe l'integrale in due parti, l'uno da 0 a 1, l'altra da 1 a c ; la prima parte sarebbe data dalla formola trovata, fattavi $c = 1$, e quanto alla seconda si porrebbe $z = \frac{1}{z'}$, $c = \frac{1}{c'}$, e il suo valore sarebbe $\frac{1}{2} \int_{c'}^1 \frac{dz'}{z'} \log \frac{1 + z'^2 + 2z' \cos \beta}{1 + z'^2 - 2z' \cos \beta}$, talché a causa di $c' < 1$, $z' < 1$ si risolverebbe nella serie

$$2 \left(\frac{1 - c'}{1} \cos \beta + \frac{1 - c'^3}{3^2} \cos 3\beta + \frac{1 - c'^5}{5^2} \cos 5\beta + \dots \right).$$

Gradisca i sensi di distinta stima con cui mi dico.

Suo aff.mo dev.mo, Angelo Genocchi.

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Carteggio, fascicolo Genocchi Angelo.

III

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

Torino 23 marzo 1860

Stimatiss. mo Signor Cavaliere

Quel Marsi di cui le parlai era assente da Torino essendosi recato a Piacenza per vedervi un fratello moribondo. Ora è tornato, e questa mattina mi disse che a suo avviso la persona più atta in Piacenza a darle le notizie ch'ella desidera sarebbe l'Ingegnere della Sezione, e ch'egli ben volentieri la indirizzerebbe con una sua lettera a quell'Ingegnere che è suo amico. Se V. S. volesse parlare al Marsi, lo troverà al Ministero dei Lavori pubblici, Sezione delle Miniere.

Dal canto mio, potrei farle una lettera pel Prof. Avv. <...>¹, il quale sebbene personalmente estraneo alle miniere e alla mineralogia potrà nondimeno metterla in relazione con tutte le persone che hanno ingerenza o notizie di tali materie.

Gradisca la conferma della mia distinta stima e mi creda

Suo Devot.^{mo} Serv.^{re}, Angelo Genocchi

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Carteggio, fascicolo Genocchi Angelo.

¹ Sembra potersi leggere nel manoscritto il gruppo iniziale *Fio*.

IV

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

Torino 29 aprile 1861

Stimatiss. Signor Professore,

Il Cav. Faà di Bruno¹ desidera ch'io Le ricordi una sua domanda già antica, indirizzata dapprima a codesto Ministero² poscia alla Facoltà di scienze fisiche e matematiche, con cui dichiarava d'aspirare al titolo di Dottore aggregato presso la medesima facoltà. Nella adunanza di questa la gran maggioranza dei votanti si pronunciò a lui favorevole, e non so per quali motivi più o meno legali la chiesta promozione gli sia stata finora ritardata o negata. Ad ogni modo credo che nulla si opponga ad un'aggregazione per decreto regio la quale se guardasse al merito dei lavori del Cav. Faà e al suo zelo pei buoni studi, ed eziandio alle circostanze del caso, sarebbe veramente un atto di giustizia.

Le sarò io stesso gratissimo se vorrà concorrere coll'opera sua efficacissima a procurargli l'adempimento dei suoi voti.

Abbiامي tuttavia per scusato se vengo ad importunarla e mi permetta di confermarmi

Suo Devot.^{mo}

Angelo Genocchi

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Carteggio, fascicolo Genocchi Angelo.

¹ Francesco Faà di Bruno (1825-1888); insegnò matematica all'Università di Torino. Fu assai attivo nelle opere assistenziali ed è stato di recente beatificato.

² All'epoca dei fatti Sella era segretario del ministero della Pubblica istruzione.

V

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

Torino 22 maggio 1861

Stimat. mo Sig. Professore

Sono un'altra volta ad importunarla con una mia lettera. Il Signor Eugenio Camerini¹ che tiene col titolo di *reggente* l'ufficio di segretario nell'Accademia scientifico-letteraria di Milano desidera esserle raccomandato per la nomina definitiva al medesimo impiego, ed

¹ Eugenio Salomone Camerini (1811-1875). Critico letterario, fu allievo del Puoti alla cui scuola conobbe Francesco De Sanctis (cfr. n. 3).

io che da lungo tempo avendo con lui relazioni di sincera amicizia ne conosco l'animo e l'impegno, non esito a rivolgerle vivissima istanza in suo favore. Oltre ai diritti che gli vengono dall'esercizio della carica e dalla diligenza adoperatavi della quale potrà far fede il Presidente dell'Accademia, egli si merita bene questo avanzamento come letterato e scrittore valentissimo che da oltre dieci anni diede lavori lodati alla stampa politica e letteraria del Piemonte. Accennerò fra gli altri molti articoli di critica letteraria nei giornali *il Cimento* e *la Rivista Contemporanea*. Non dovrebbe dunque essere trattato come un principiante che ha un lungo avvenire innanzi a sé e che può aspettare tranquillamente la promozione. Deve anche riflettersi che l'età inoltrata e gli acciacchi non gli permettono oramai di supplire con altri lavori al meschino e affatto insufficiente suo stipendio attuale. Spero pertanto ch'Ella vorrà prendere a cuore gl'interessi del Camerini il quale non può ora prevalersi delle promesse fattegli mentre era Ministro il conte Mamiani² e vorrà proporre la nomina al Ministro De Sanctis³ da cui esso è personalmente e (credo) favorevolmente conosciuto⁴. Di ciò Le sarà gratissimo.

² Terenzio Mamiani Della Rovere (1799-1885). Filosofo, fu Ministro della Pubblica istruzione dal 20.1.1860 al 22.3.1861.

³ Francesco De Sanctis (1817-1883). Critico letterario e allievo del Puoti presso la cui scuola fu a lungo anche docente. Fu Ministro della pubblica istruzione dal 22.3.1861 al 3.3.1862 e dal 4.3.1878 al 19.12.1878. Ebbe come segretari generali Sella dal 7.3.1861 al 23.6.1861 e poi Brioschi fino alla sua caduta.

⁴ All'epoca dei fatti Sella era segretario della Pubblica istruzione e si interessò attivamente della questione facendo circolare la lettera di Genocchi all'interno del ministero.

Su una facciata non utilizzata da Genocchi vi è infatti una serie di 5 annotazioni.

La prima di calligrafia ignota consiste nella sola parola "Genocchi" a penna.

La seconda, a matita e ancora di mano ignota, è la seguente:

" Il Camerini fu con il R. Decreto del 20 ottobre 1860 eletto applicato alla Biblioteca della R. Università di Pavia collo stipendio di £ 1200. Non <applicabile> altro Decreto."

La terza ancora a matita siglata con una G sembra essere dovuta ad un funzionario interpellato da Sella e da lui menzionato esplicitamente nel seguito il cui nome non è perfettamente individuabile sembra essere Garreri. Il testo è il seguente:

" Salvo errore, non si <recò a Pavia, fu> con altro Decreto 3 gennaio 1861 nominato Reggente Segretario dell'Accademia Scientifico letteraria di Milano con <£ 1900>. G."

Segue poi una annotazione del Sella stesso, a penna:

"Al S. Cav. <Garreri>

esiste in pianta il posto di Segretario definitivo?

Quale assegno è riportato per tal posto? Q. Sella"

L'ultima annotazione, a penna, è ancora dovuta al funzionario Garreri:

Il suo Devoto Serv.^{te}, Angelo Genocchi

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Carteggio, fascicolo
Genocchi Angelo.

“Con la Pianta approvata con R. Decreto del 20 9bre 1859 si stabili per l'accademia scientifico letteraria

un Segretario con	£ 2200
1 applicato di 4° classe	£ 1200
1 altro applicato con	£ 1000
Un Inserviente con	£ 720

G.”.

VI

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

12 giugno [1863]

Pregiat. mo Collega

Prima di mandarvi i numeri del *Bullettino meteorologico* li riscontrai diligentemente e posso assicurarvi che nessuno mancava; quindi è forza ammettere che se ne siano smarriti effettivamente, come avete sospettato, nel passaggio dalle vostre ad altre mani.

I numeri che ora mancano sono tutti del secondo volume (anno 1863), vale a dire

Num. 1 e 2 = 15 e 31 gennaio 1863;

Num. 5 = 15 marzo 1863;

Num. 7 = 15 aprile 1863.

Forse potrete recuperarli cercandone presso quelli a cui avevate comunicata la raccolta.

Desidero che vi riusciate e mi dico

V.^{ro} aff.^{mo}

Angelo Genocchi

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Carteggio, fascicolo
Genocchi Angelo.

VII

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

Torino 13 gennaio 1868

Stimatiss. Collega,

La mia Nota *intorno ad una trasformazione*¹ ecc. fu pubblicata nel fascicolo di *Marzo e Aprile* 1867 del *Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università Italiane pubblicato* (in Napoli) *per cura del professore G. Battaglini*, pag 106-109.

La *soluzione generale* ivi esposta che comunicai al Conte S.ⁿⁱ Robert² si limita alla parte che finisce con le parole *e sarà determinata così anche la funzione incognita X* della seconda pagina. Io aggiungeva un esempio che ho creduto di omettere nella stampa. Questa comunicazione fu fatta nel gennaio 1867, poiché una lettera del Conte S.ⁿⁱ Robert 21 gennaio 1867 faceva cenno di essa dicendo parergli che la mia soluzione conduce ad una semplice identità e non vedeva come ecc..

Con altra lettera 23 gennaio egli mi mandava un suo scritto sul medesimo argomento pur confessando che l'analisi ivi esposta ne *conduit pas a grand'chose*, e poi nell'adunanza dell'Accademia³ che venne subito dopo (credo 27 gennaio) mi mostrò un altro suo scritto che conteneva la soluzione presentata finalmente all'Accademia nell'adunanza del 7 aprile. Fu all'uscire da questa adunanza che io scrissi la nota suddetta e la mandai al Battaglini⁴.

Eccole per ciò che mi riguarda la storia di questo incidente, a cagion del quale come le scrissi ieri desidero di non essere nominato se non sia necessario.

Mi confermo coi sensi della più alta stima.

Suo Devot.^{mo}

Angelo Genocchi

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Carteggio, fascicolo Genocchi Angelo.

¹ Si tratta della nota A. Genocchi *Intorno ad una trasformazione di un'equazione a tre variabili*, "Giornale di Matematiche" v. V pp. 106-109.

² Paolo di Saint Robert; cfr. n°1 n. 2.

³ Si tratta dell'Accademia delle Scienze di Torino.

⁴ Giuseppe Battaglini (1826-1894); insegnò alle Università di Roma e di Napoli e introdusse in Italia le geometrie non euclidee

VIII

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

Torino 29 dic 1874

Stimatiss. Collega

Ricevetti la vostra lettera e un'altra mi fu comunicata dal Collega Gastaldi¹, intorno alla Società dei XL. Sono dolente che il mio modo di vedere non si accordi col vostro. Quella Società può finire come tutte le cose umane ma non può fondersi a mio avviso con alcuna delle Accademie particolari d'Italia; e il mio voto sarà piuttosto per lo scioglimento puro e semplice della Società!

Il Brioschi² non ha fatto nulla per essa finché ne fu presidente: vorrebbe ora occuparsene visto che i suoi poteri sono cessati e occuparsene per seppellirla? Attenda egli i suoi interessi personali e lasci in pace la scienza e gli scienziati che nulla di buono possono più da lui aspettarsi.

Vi contraccambio di cuore gli auguri e i saluti e mi confermo

V.^{ro} aff.^{mo} e Devot.^{mo}

Angelo Genocchi

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Carteggio, fascicolo Genocchi Angelo.

¹ Bartolomeo Gastaldi; cfr. n° 8 n. 7.

² Francesco Brioschi; cfr. n°. 5 n. 1. Brioschi non riuscì a giustificare, alla fine della sua presidenza della Società Nazionale, le spese inserite effettuate.

IX

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

Torino 13 gennaio 1875

Pregiatiss. Collega,

Non credo che citando il motto *sint ut sunt aut non sint*¹ abbiate voluto darmi del gesuita.

Ho molti difetti ma questo no e credo che lo sappiate. Forse conoscete qualche mia polemica in cui non io ma il mio avversario è stato convinto di gesuitismo e d'impudenti menzogne.

¹ Cfr. n°6 n. 2.

Ma ho paura delle vostre *trasformazioni*. Non m'intendo di organismi vitali e non **vitali**. I miei studi mi rendono più sollecito del rispetto dovuto alla proprietà e a tutti i **diritti** individuali. Perciò mi pare cosa enorme il voler trasformare in quel bislacco modo la **Società** dei XL con un semplice Decreto. Non si tratta del numero dei voti: il progetto a me pare semplicemente non proponibile. Almeno Mamiani² quando intendeva sconvolgere la **Società** nostra ricorreva al Parlamento. E quel barocco doppio titolo? E la nuova Classe **creata** senza dire come si nomineranno i primi 30 suoi membri e come si provvederà alla **spesa**! *Quam parva sapientia...*³.

Lasciateci il titolo di Società dei XL, e voi se vi piace create pure l'*Accademia dei Settanta* forse per onorare i *Settanta* traduttori della Bibbia⁴. Farete cosa assai grata al **Conte** Mamiani (sia detto in confidenza e per provarvi quanto mi scosto dal fare gesuitico), e lo **consolerete** della cattiva riuscita della *Società italiana per l'avanzamento delle scienze*⁵.

Il vostro atto al Ministero della pubb. istr. fa onore alla vostra lealtà della quale non ho mai **dubitato**, e per parte mia ve ne ringrazio. Potreste anche informarlo dell'errore in cui **probabilmente** è caduto poiché trattando col Brioschi avrà supposto di trattare col **Presidente** dei XL mentre egli da qualche mese non lo era più di diritto come da molto **tempo** non lo era più di fatto.

Potete del resto aggregare ai Lincei quanti vorrete. Solamente se la cosa mi **riguardasse** io dubiterei dell'utilità dell'aggiunta d'una Classe di filosofi e filologi; si **facciano** due Accademie distinte ma la riunione mi pare più nociva che utile, e me lo prova l'**esperienza** fatta in questa Accademia di Torino.

Ad ogni modo lasciate in pace i XL, e non fate che si ripeta l'altro motto latino con cui **intendo** rispondere al vostro *Quod non fecerunt barbari fecerunt Barberini*⁶. I governi di **Francesco** IV⁷ e di Francesco V⁸ rispettarono la Società fondata dal Lorgna⁹ e la lasciarono

² Terenzio Mamiani della Rovere; cfr. n° V n. 2.

³ Non è **stato** possibile individuare la fonte dalla quale è tratta la citazione.

⁴ Il **referimento** è, naturalmente, alla Septuaginta, versione della Bibbia in greco d'età ellenistica realizzata da 70 dotti.

⁵ La **Società** italiana per l'avanzamento delle scienze fu l'antesignano della più celebre Società italiana per il **progresso** delle scienze

⁶ Il **detto** si riferisce agli interventi voluti da papa Urbano VIII Barberini sul Pantheon.

⁷ **Francesco** IV (d'Austria - Este) (1779-1846) fu duca di Modena e Reggio dal 1814 al 1846 e padre di **Francesco** V.

⁸ **Francesco** V (d'Austria - Este) (1819-1875) fu duca di Modena e Reggio dal 1846 al 1859.

vivere indipendente e tranquilla. Non è una gran vergogna che il Governo Italiano abbia pensato e pensi a manometterla?

Nonostante questo dissenso conservatemi la vostra benevolenza e credetemi pure

V.^{ro} Aff.^{mo} e Devot.^{mo}

Angelo Genocchi

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Accademia dei Lincei, Carteggio 1875, mazzo 6, fascicolo 20 sottofascicolo Genocchi.

⁹ Anton Maria Lorgna; cfr. n° 5 n. 2.

X

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

Torino 16 gennaio 1875

Pregiatiss. Collega,

Sono di nuovo a voi che credo il più leale tra i fautori della proposta di fusione dei XL coi Lincei¹.

Penso d'aver interpretato il vostro desiderio comunicando ad alcuni dei Quaranta il vostro viglietto del 10 gennaio. La nuova circolare (12 gennaio) del Marianini² è venuta a confermarlo; ma confesso di non intendere come il Betti³ abbia potuto sottoscrivere la lettera ministeriale ivi riportata ove il Comm. Brioschi⁴ fa una così trista figura. Poiché ne risulta che il ministro⁵ aveva trattato col Brioschi credendolo Presidente dei XL, e quindi o che il Brioschi non sapeva d'esser uscito di carica o che sapendolo aveva dissimulato questa che il Ministro con espressione tutta umoristica chiama spiacevole circostanza. Lascio la seconda ipotesi e attenendomi alla prima stupisco d'una così colpevole negligenza e di così poca serietà in un affare che io giudico gravissimo.

“Il bricconcel che non se n'era accorto faceva il presidente ed era morto”.

E il Betti che figura fa poiché egli stesso sottoscrisse la circolare del 29 ottobre 1868 annunziante la elezione del Brioschi!

¹ Si tratta, naturalmente, della Società Nazionale delle Scienze e della Reale Accademia dei Lincei.

² Pietro Domenico Marianini; cfr. n° 9 n. 4.

³ Enrico Betti, cfr. n° 7 n. 11.

⁴ Francesco Brioschi; cfr. n° 5 n. 2.

⁵ Ministro della Pubblica istruzione all'epoca dei fatti era Ruggiero Bonchi, per il quale cfr. 10 n. 2.

Oh non potrebbe pretendersi qualche maggior cura e diligenza da chi s'incarica di vegliare sopra determinati interventi pubblici o privati? Perché non si rifiuta un incarico al quale non si vuole attendere come è dovere?

Ma ciò che più importa si è di notare come il Ministro siasi messo ad un punto di vista che non è il vero. Al Ministro della pubblica istruzione non appartiene alcuna ingerenza sulla Società dei XL, la quale ha stabilito e può cambiare a suo arbitrio il proprio statuto senza che quel Ministro possa influirvi o intromettersi menomamente. Tale autonomia e indipendenza della nostra società fu rispettata dai cessati governi dispotici, e (giova ripeterlo) sarebbe un obbrobrio che il Governo italiano volesse menomarlo. Qual diritto ha dunque il Ministro di domandarmi un voto? di stabilire un tempo a manifestarlo? di esercitar pressioni? di giudicare se una minoranza sia o non sia ragguardevole come dice quella lettera ministeriale senza data precisa (il povero Betti aveva perduto il lunario)?

Vi prego pertanto di far ben capire al Ministro che non si tratta di contare o non contare voti, ma che il progetto non è proponibile e i soci hanno diritto di non rispondere cosicché dovrebbe ritenersi che i soci i quali non rispondono non riconoscono nel Ministro l'autorità di interrogarli.

Un'altra ragione per cui il progetto non è proponibile ad uomini seri è l'ommissione avvertita nella precedente mia lettera del modo di nominare i primi 30 membri della nuova classe e di provvedere alla spesa di questa classe. Né ad uomini seri è proponibile l'art. 39 (ultimo) che permette al Ministro di variare gli statuti col solo obbligo di udire l'Accademia e il Consiglio di stato, onde sulla sua responsabilità egli potrebbe anche per esempio abolire l'art. 36 e mettere anche le spese della nuova classe a carico dei patrimoni particolari dei Lincei e dei Quaranta.

Questi difetti mi sembrano così chiari che non possono essere sfuggiti al vostro acume. Ma per parlarvi francamente come son uso, io sospetto che voi abbiate qualche impegno con M⁶... povero vecchio che ha una voglia matta di esser nominato Presidente d'un' Accademia nazionale.

Contentatelo; ma non strozzate la Società dei XL. Non parlo delle ipocrite proteste di deferenza; non del preteso equiparamento (e i gettoni di presenza? ecc. ecc.); non delle prevalenze locali che saranno anche negli attuali Lincei cosicché questa osservazione del Ministro dovrebbe determinare gli attuali Lincei se hanno senso di delicatezza a raggiungere la fusione coi Quaranta. E per non seccarvi oltre concludo: *Etsi omnes, ego*

⁶ Si tratta quasi certamente di Terenzio Mamiani (cfr. n° V n. 2).

*non*⁷. Io resterò sempre *uno dei Quaranta* e non ambisco affatto al titolo di *uno dei Settanta*⁸ qualunque sia la venerazione che possa aversi costà in Roma pei Settanta traduttori della Bibbia. E raccomandandomi alla vostra <potente intercessione> mi confermo,

V.^{ro} Devot.^{mo}

Angelo Genocchi

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Accademia dei Lincei, Carteggio 1875, mazzo 6, fascicolo 20 sottofascicolo Genocchi.

⁷ Non è stato possibile individuare la fonte dalla quale è tratta la citazione.

⁸ cfr. n° IX n. 4.

XI

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

Torino 27 del 1875¹

Pregiatiss. Collega,

Vi ringrazio dell'esemplare del brindisi nel quale ho trovato una nuova prova della molta vostra dottrina.

Avete ragione di reputare inutili ormai le discussioni sulla fusione. Non solamente una minoranza ragguardevole ma forse la maggioranza s'è dichiarata contraria. Anche Sismonda², Tardy³, <...>⁴, Santini⁵, Schiaparelli⁶ la respingono. Hanno dato voto in apparenza di adesione, in sostanza contrario, Padula⁷, Palmieri⁸, Scacchi⁹, Trudi¹⁰: poiché annuendo a trasferire in Roma la Società dei XL vogliono che lo Statuto sia fatto dai Soci e non ammettono alcuna fusione coi Lincei.

¹ Secondo un uso del tempo, Genocchi omette l'indicazione del mese quando si tratta di gennaio; in effetti in tal caso il giorno dell'anno coincide col giorno del mese.

² Angelo Sismonda (1807-1878); mineralogista e geologo insegnò all'Università di Torino.

³ Placido Tardy (1816-1914); fu professore di calcolo infinitesimale all'Università di Genova.

⁴ Sembra potersi leggere nel manoscritto una finale in *ani*.

⁵ Giovanni Santini (1786-1877); astronomo, diresse l'osservatorio di Padova.

⁶ Giovanni Virgilio Schiaparelli; cfr. n° 8 n. 10.

⁷ Fortunato Padula (1815-1881); insegnò idraulica e meccanica all'Università di Napoli.

⁸ Luigi Palmieri (1807-1896); insegnò fisica terrestre all'Università di Napoli.

⁹ Arcangelo Scacchi; cfr. n° 8 n. 13.

Noi ho dunque a discutere le vostre teorie sugli enti morali. La società dei XL ha sempre fatto e rifatto i suoi statuti senza alcuna ingerenza del Governo: perché privarla di questa bella prerogativa? Essa ha sempre eletto i suoi presidenti e soci senza l'approvazione governativa, e voi mi parlate a questo proposito della *eleggibilità senatoria*. Confesso umilmente di non capire. E senza fermarmi ad altri particolari, noterò solo che in ogni caso un Decreto non basterebbe ma sarebbe necessaria una legge.

Il vostro brindisi comincia con queste parole: "L'Accademia dei Lincei è istituzione governativa". All'incontro la Società Lorgna¹¹ è istituzione privata: ed ecco una buona ragione contro la fusione. Un'altra mi è offerta dalla lettera ministeriale ove dice: "il governo sapeva la severità con cui erano fatte dalla Società dei Quaranta ed in nessun'altra Accademia poteva trovare raccolto tutto il fiore degli scienziati italiani senza prevalenze locali." Ciò mette in chiaro che non è possibile una fusione, e mostra ad un tempo che il proporla non fu atto di deferenza ma quasi quasi un'ingiuria.

Aggiungo che non fu atto di deferenza il proporre un progetto non abbastanza maturato e incompleto come quello che creando una nuova Classe ometteva di provvedere alla formazione e ai redditi di questa Classe. Come mai poteste lasciar correre una omissione tanto grave, voi esperto di finanze, voi che anco nel brindisi del marzo chiedevate sussidi e non li otteneste? Il tempo di pensare a tali lacune non vi mancò poiché dal marzo 1874 siamo passati al gennaio 1875.

Ora trasformerete soltanto l'Accademia dei Lincei. Ma colmerete queste lacune?

Ciò che mi dite della Classe di scienze morali è alquanto in opposizione colla lettera ministeriale che dichiara non essersi voluto istituire un'Accademia di più. Quella Classe non è un'Accademia di più? Del resto cercando bene avreste forse trovate esistenti in Roma già Accademie di scienze storiche, filologiche ecc. per esempio l'Accademia d'archeologia. Quanto al fare un'Accademia divisa in due classi con un solo Presidente e una sola amministrazione, ne vediamo in Torino gl'inconvenienti; e per me preferirei d'imitare piuttosto l'ordinamento dell'Istituto di Francia¹². Ma non tocca a me d'ingerirmi in questo.

Accetto infine le vostre conclusioni sulle divergenze di pareri che non debbono togliere alla stima reciproca. Solo mi permetto di osservare riguardo al Brioschi da voi più

¹⁰ Nicola Trudi (1811-1884); insegnò calcolo infinitesimale all'Università di Napoli.

¹¹ Anton Maria Lorgna; cfr. n° 5 n. 2.

¹² Sull'Istitut di Francia cfr. n° 15 n. 4.

volte nominato che la sua condotta come Presidente della Società dei XL non può essere lodata né difesa.

Abbiatemi dunque quale di cuore mi protesto

V.^{ro} Devotiss.^{mo}

Angelo Genocchi

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Accademia dei Lincei, Carteggio 1875, mazzo 6, fascicolo 20 sottofascicolo Genocchi.

XII

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

Torino 18 febbraio 1875

Pregiatiss. Collega,

Non posso che essere grato a voi e agli altri degni Accademici¹ i quali hanno contribuito alla mia nomina dell'onore che mi annunziate. Un tale attestato di stima venuto da persone che altamente si stimano deve essere accolto con riconoscenza, e questo mio sentimento prego voi a voler gradire la espressione e a parteciparla ai vostri onorandi Colleghi.

Ma questa nomina è fatta in condizioni diverse dalle ordinarie, poiché si tratta di elezioni avvenute in conformità d'uno statuto le quali dovevano dar origine ad un'Accademia che sarà regolata da un altro statuto.

Di più, il nuovo statuto non è ancor pubblicato, ch'io sappia, né io lo conosco interamente non sapendo appuntino quali cambiamenti sono stati recati al primitivo progetto per toglierne quanto si riferiva all'unione dell'Accademia dei Lincei colla Società dei XL; e ignoro del pari quali disposizioni siano state introdotte o tolte relativamente alla nuova classe creata per le scienze morali storiche e filologiche. Spero dunque che troverete giusto ch'io soprasseda all'accettazione della nomina finché non mi sia stato comunicato il nuovo statuto dell'Accademia o almeno le variazioni recate al primitivo prospetto distribuito ai XL e dalla maggioranza di essi respinto.

I tre appartenenti a quella maggioranza che avete aggregati ai Lincei portano candidato alla presidenza dei XL il prof. Bellavitis². Uno dei vostri si adopera con arti indegne a dividere i voti e sembra aver dimenticato che altra volta il troppo zelo gli ha nociuto.

¹ Si tratta della Reale Accademia dei Lincei.

² Giusto Bellavitis; cfr. n° 6 n. 3.

Mi dicono che il candidato³ della parte vostra sia uno di quei soci i quali fecero dipendere il loro voto dalla concessione di vantaggi pecuniari e d'*un cospicuo gettone di presenza*; ma non voglio crederlo perché dovrei ripetere quel vostro aforisma: Il diapason morale è molto basso in Italia!

Confidiamo nell'aiuto della Provvidenza che voglia non raramente unire caratteri stimabili ad ingegni ammirabili e credetemi sempre

V.^{ro} Devot.^{mo} Aff.^{mo} Angelo Genocchi

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Accademia dei Lincei, Carteggio 1875, mazzo 6, fascicolo 20 sottofascicolo Genocchi.

³ Si tratta di Arcangelo Scacchi (cfr. n° 8 n. 7) che peraltro risultò eletto presidente della Società Nazionale.

XIII

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

[Torino, fine febbraio 1875]¹

Pregiatiss. Collega,

Siete proprio uscito di gangheri, e quando vi sarete calmato credo che ne avrete rimorso. Non so dove abbiate trovata una calunnia: il voto da me accennato è vero ed autentico, ed io non ho fatto che esprimere il pessimo senso che prima di me ne avevano ricevuto altri d'animo freddo e pacato. Quanto al prof. Scacchi² personalmente, non ho mai inteso di attaccarlo, anzi due giorni fa ad un collega³ che temeva della riuscita della sua candidatura scrissi che si assicurasse perché io lo sapeva (cito le parole testuali) *uomo d'indole schietta e benigna e stimandolo per ogni riguardo*. Ma resta sempre il fatto di quella che voi dite *frase infelice*, e bisogna subirne le conseguenze.

Mi sovviene d'un'altra frase famosa: *faremo quattrini*. Il deputato che l'avea scritta, spiegò le sue intenzioni, la chiamò frase infelice, ma uscì dal Parlamento. Né voi avreste approvato che fosse proposto a Presidente o Segretario o Questore della Camera.

¹ La lettera si data con quella corrispondente di Sella del 20 febbraio 1875 (cfr. n° 9) alla quale è successiva.

² Arcangelo Scacchi; cfr. n° 8 n. 13.

³ Potrebbe trattarsi di Maurizio Bufalini al quale cfr. n° 7 n. 5. In effetti Bufalini scrisse a Genocchi il 17 gennaio e il 18 febbraio 1875 per esprimere le sue forti perplessità sui tentativi di potere Scacchi alla presidenza della Società Nazionale delle Scienze; Genocchi. Le lettere sono conservate presso la Biblioteca Passerini Landi di Piacenza, carte Genocchi, busta Maurizio Bufalini e ne sono riportati stralci in P. Ziliani *Quintino Sella e la cultura napoletana* cit. in *Cenni biobibliografici, Quintino Sella*.

Direte che v'ha una gran differenza, né ve lo contrasto, ma persisto nel ritenere che dopo quel voto disgraziato non sia decoroso per gli Scienziati italiani eleggere a Capo della Società dei XL uno di quelli che l'hanno sottoscritto. E penso ch'egli stesso, l'uomo da me altamente onorato e rispettato, dovrebbe consigliare i suoi amici a non nominarlo, e quando sia nominato non accettare la nomina.

Credo poi che abbiate assolutamente torto laddove accusate il Marianini⁴; accusino sé stessi i quattro che han mandato quel voto, non il Marianini. Voi dite che la frase infelice fu "astutamente messa in rilievo dal Marianini accanto ad una protesta che vi dicono immaginaria del Casorati⁵ e del Cornalia⁶." Chi legge deve pensare che anco la protesta di Casorati e Cornalia (secondo quello che a voi dicono) sia una impostura del Marianini; ma questa se alcuno così la intendesse sarebbe una vera calunnia. Nessuno di buon senso può sospettare che il Marianini abbia inventata una tale protesta; può esservi stato errore (se davvero vi sia stato, non so) ma per parte del Lombardini⁷, non del Marianini. E perché Casorati e Cornalia non hanno reclamato contro il Lombardini o contro il Marianini?

Quanto a me non ho nulla da ritrattare, nulla da disdire. Per la nomina del Presidente, non ho cercato affatto d'influire presso i Soci d'opinione contrari a alla mia, e ai nostri non avrei in questi tempi, in cui l'istituzione Lorgna⁸ è minacciata, raccomandato se non uno che avesse dimostrato il suo amore per essa coll'inserire Memorie nei Volumi Sociali.

Vi perdono la vostra sfuriata che prova la schiettezza del vostro carattere e mi confermo

V.^{ro} Devotiss.^{mo}

Angelo Genocchi

P.S. Ripensando ai termini della mia lettera precedente (ho il vizio di non tener copia delle lettere che scrivo), mi nasce il dubbio che possa avervi urtato la frase sui caratteri stimabili e impegni ammirabili. Vi dichiaro che scrivendola non pensava punto allo Scacchi. Pensava piuttosto ad altri a cui meglio che a me dovrete rivolgere le vostre ire e le vostre citazioni del *Sint ut sunt*⁹, del *Calomnier toujours* e altre simili se ne avete. Come,

⁴ Pietro Marianini; cfr. n° 9 n. 4.

⁵ Felice Casorati; cfr. n° 8 n. 4.

⁶ Emilio Cornalia; cfr. n° 8 n. 5.

⁷ Elia Lombardini; cfr. n° 7 n. 7.

⁸ Anton Maria Lorgna; cfr. n° 5 n. 2.

⁹ Per la citazione latina cfr. n° 6 n. 2.

persuadetevi una volta, sono del tutto fuori di luogo, tanto fuori di luogo che non valgono nemmeno a mettermi in collera. Dunque *sans rancune*: mi appello a Sella calmato contro Sella irato.

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Accademia dei Lincei, Carteggio 1875, mazzo 6, fascicolo 20 sottofascicolo Genocchi.

XIV

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

Torino 12 marzo 1875

Pregiatiss. Collega,

Mi scriveste il 20 febbraio che avreste avuto cura di farmi mandare presto il novello statuto de' Lincei. Finora non me lo avete mandato ma jeri lo trovai nella gazzetta Ufficiale, e posso quindi darvi la mia risposta che mi riservai colla lettera del 18. Vi dichiaro adunque che accetto la nomina di socio della R. Accademia de' Lincei, poiché questa trasformandosi in modo da ricevere Soci appartenenti a tutte le province italiane non ha più bisogno di assorbire e distruggere la Società dei XL, e poiché il vincolo delle sedute stabilisce una differenza troppo essenziale fra l'uno e l'altro sodalizio scientifico.

Nella stessa mia lettera del 18 febbraio espressi già i miei sentimenti di riconoscenza per la testimonianza di stima datami da voi e dagli altri colleghi che mi hanno eletto.

Abbiatemi nuovamente

V.^{ro} Devotiss.^{mo}

Angelo Genocchi

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Accademia dei Lincei, Carteggio 1875, mazzo 6, fascicolo 20 sottofascicolo Genocchi.

XV

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

Torino 20 aprile 1875

Pregiatiss. Collega,

Ho ricevuto questa mattina lo statuto de' Lincei, la lettera presidenziale che mi annuncia l'approvazione sovrana della mia nomina, e la gratissima vostra lettera confidenziale che mi conferma tale annuncio. Di tutto ciò vi rendo sincere e vivissime

grazie, e principalmente vi attesto la mia riconoscenza pei sentimenti così benevoli che mi esprimete e ai quali vi prego di credere che corrispondo con tutto l'animo. Dirò anzi che mi mettete in soggezione perché temo di dovervi cagionare altre disillusioni quando vi manderò qualche mio lavoro per l'Accademia (ora non ho nulla di pronto) e lo troverete molto inferiore alla vostra aspettazione.

Mi riservo di mandare una risposta ufficiale quando riceverò la copia del Decreto e il diploma.

Al presente non ho più che a ripetermi con tutta la stima.

V.^{ro} Devotiss.^{mo}

Angelo Genocchi

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Accademia dei Lincei, Carteggio 1875, mazzo 6, fascicolo 20 sottofascicolo Genocchi.

XVI

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

Torino 24 aprile 1877

Stimatiss. Presidente,

Mando le mie schede che troverete conformi ai desideri dei Colleghi. Riceverete anche in plico separato alcuni esemplari d'un mio scritto¹ relativo ad undici lettere di Lagrange testé fatte litografare dal Boncompagni². Vogliate gradirne uno per voi e far rimettere gli altri. E' un lavoro da copista e però compatitemi: quando potrò far qualche cosa di meglio lo darò ai Lincei³.

Ho ricevuto i fascicoli degli Atti pel corrente anno ma non le due *Parti* che ho viste alla vostra Accademia e che hanno la data di stampa del 1876. Intendo il volume III^o della Serie seconda (1875-76):

Parte prima. Transunti e Bullettino bibliografico.

Parte seconda. Memoria della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

Non ho ricevuta né l'una né l'altra di queste due parti. Ve ne avverto perché non crediate d'avermele già inviate o per evitare che si smarriscano.

Abbiate intanto e di nuovo i miei ringraziamenti vivissimi e tenetemi sempre per

¹ Per la nota in questione cfr. n° 12 n. 2

² Baldassarre Boncompagni cfr. n° 12 n. 2

³ Si tratta della Reale Accademia dei Lincei.

V.^{ro} Devotiss.^{mo} Serv.^{re} e Collega

Angelo Genocchi

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Accademia dei Lincei, Carteggio 1877, mazzo 6, fascicolo 24 sottofascicolo Genocchi.

XVII

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

Torino 5 maggio 1877

Stimatiss. Presidente,

Ricevo i fogli sciolti che formano il compimento delle tre parti del Volume accademico 1875-76, e insieme le copertine delle medesime tre parti.

Vogliate accettare i miei vivi ringraziamenti.

Colla vostra lettera mi avete onorato assai più che non potrei meritare. Ma state sicuro che non mancherò potendo di adempire quando le mie forze i miei doveri verso l'Accademia¹. Finora l'indebolimento della mia vista che mi faceva temere la perdita totale di essa, e poi una grave malattia di mia madre ottuagenaria che disgraziatamente quando pareva vicina alla guarigione è ricaduta e mi tiene in grande ansietà, mi hanno impedito d'applicarmi a studi o ricerche speculative, né so quando mi sarà dato di occuparmene.

Usatemi dunque indulgenza e credetemi

V.^{ro} Aff.^{mo}

Angelo Genocchi

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Accademia dei Lincei, Carteggio 1875, mazzo 6, fascicolo 20 sottofascicolo Genocchi.

¹ Si tratta della Reale Accademia dei Lincei.

XVIII

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

Torino 15 maggio 1877

Stimatiss. e Riveritiss. Collega

Mi affretto ad esprimervi la mia viva riconoscenza per la notizia che mi avete con gentile pensiero inviata col mezzo del telegrafo, della proposta fatta in mio favore dal Consiglio dell'Ordine di Savoia. Anzi vi debbo una doppia riconoscenza sì per la parte che

avete avuta in quella proposta, e sì per la premura di rendermene immediatamente consapevole. Io sono veramente commosso dalle tante prove che mi date della vostra benevolenza, non potendo trovare in me cosa alcuna che mi renda degno d'una distinzione così onorevole come è quella a cui il voto vostro e quello de' vostri Colleghi mi hanno designato.

Non scrivo al prof. Ricotti¹ che vi è stato compagno nel darmi il grato annunzio, perché non so se la mia lettera lo troverebbe ancora costì. Vogliate, vi prego, se egli sia ancora a Roma e se avete occasione di vederlo, ringraziarlo pure a nome mio.

E vogliate insieme accettare l'espressione di quel riverente affetto con cui godo confermarmi

V.^{ro} Devot.^{mo} Obbed.^{mo} Servo

Angelo Genocchi

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Carteggio, fascicolo Genocchi Angelo.

¹ Ercole Ricotti (1816-1883). Laureato in ingegneria idraulica e ufficiale del genio, si dedicò prevalentemente a ricerche storiche. Insegnò storia militare all'Università di Torino.

XIX

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

Torino 7 novembre 1881

Onorevole Signor Presidente,

In risposta alla circolare del 30 ottobre 1881, propongo pel posto disponibile di Corrispondente nazionale della R. Accademia dei Lincei (Matematica pura ed applicata e Astronomia) il Signor Colonnello Annibale Ferrero¹ dell'Istituto topografico militare di Firenze

La prego di gradire i sensi del mio ossequio.

Devoto Servo, Angelo Genocchi

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Accademia dei Lincei, Carteggio 1881, mazzo 9, fascicolo 39 sottofascicolo Genocchi.

¹ Annibale Ferrero (1838-1902); ufficiale e geodeta dell'Istituto topografico di Firenze, fu direttore dell'Istituto geografico militare.

XX

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

Torino 27 novembre 1882

Illustre Presidente,

Mi si è spezzata la rotula del ginocchio destro¹. E tengo ancora il letto. In questa posizione e stante la mia vista corta mi è molto incomodo l'uso di penna e inchiostro. Perciò mi scuserete se scrivo col lapis.

Vi ringrazio molto della vostra lettera.

Mi duole d'esser arrivato tardi. Spero che non sarà lo stesso questa volta. Ripeto la scheda smarrita.

Abbatevi i miei cordiali saluti e ringraziamenti e credetemi

V.^{ro} Aff.^{mo}

Angelo Genocchi

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Accademia dei Lincei, Carteggio 1881, mazzo 10, fascicolo 43 sottofascicolo Genocchi.

¹ cfr. n°14 n. 1.

XXI

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

Torino 16 giugno 1883

Ill.mo Signor Presidente,

Per succedere al Corrispondente Nazionale Prof. R. Minich¹ propongo il Comm. Enrico D'Ovidio², professore di matematica nella R. Università di Torino.

I suoi titoli scientifici sono abbastanza noti ai cultori delle scienze fisiche matematiche, per gli altri sarebbe inutile indicarli.

Stimo anche inutile occuparmi della questione se proponendosi tre nomi debbano scegliersi in diverse scienze; poiché è lecito proporre un nome solo come faccio io, e del resto secondo i nostri statuti non si può determinare la scelta definitiva cioè la terna fuorché dal maggior numero di voti conseguiti dalla totalità dei votanti.

¹ Serafini Raffaele Minich (1808-1883); insegnò analisi algebrica e calcolo infinitesimale all'Università di Padova.

² Enrico D'Ovidio (1843-1933); insegnò geometria all'Università di Torino.

Lascio anche del pari l'altra questione che si riferisce alla Società dei XL, potendosi pensare da molti che l'essere dei Quaranta sia maggior onore che l'essere uno de' Lincei e quindi che i Quaranta non debbano rimpiangere di non essere contemplati nelle nomine all'Accademia de' Lincei.

Ho l'onore di protestarmi con sincero ossequio

Devot.^{mo} Serv.^{re} e Collega
Angelo Genocchi

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Accademia dei Lincei, Carteggio 1883, mazzo 11, fascicolo 49 sottofascicolo Genocchi.

XXII

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

Torino 10 ottobre 1883

Illustre Presidente,

Non vi ho mandato proposte per le nomine da farsi nell'Accademia secondo la vostra circolare 17 settembre N° 176, perché non ho sufficiente conoscenza degli scienziati di quei rami speciali. Solo credo mio dovere di approfittare della busta che ho ricevuta munita di francobollo, per esporvi alcune osservazioni.

Con mia meraviglia non ho trovato negli stampati a me trasmessi le ragioni della disposizione del nuovo Statuto che tanto accresce il numero dei Soci stranieri equiparandoli ai Nazionali; la qual disposizione mi è sempre parsa e ancora mi pare molto stravagante, e tale che non se ne incontra una simile in nessuna delle Accademie da voi citate né (credo) in altre delle esistenti.

Il numero dei Soci stranieri (cogli stessi diritti dei Nazionali) doppio in una Classe e nell'altra eguale a quello dei Nazionali! E perché questa differenza fra le due Classi? Una siffatta differenza non è una seconda stravaganza aggiunta alla prima e tanto inesplicabile quanto la prima? Esprimendomi francamente con voi dirò che il buon senso non brilla in questa parte del nuovo Statuto.

Intanto il numero esorbitante di personaggi stranieri introdotti nell'Accademia coi diritti stessi dei Nazionali fa ch'essa debba considerarsi piuttosto come internazionale o cosmopolita che come nazionale. Onde se la qualità di Accademia nazionale fosse veramente richiesta dalla legge del 14 maggio 1881 a norma di quanto ha affermato il

Ministro Baccelli¹ nella sua lettera del 18 luglio, l'Accademia de' Lincei dopo il nuovo Statuto che la rende cosmopolita, non potrebbe fruire dei vantaggi conceduti da quella legge.

Un altro argomento di meraviglia mi han dato le vostre dimissioni che non avrei mai immaginato fossero cagionate dalla fisiologia e patologia, e ho pensato che ne derivasse una obiezione contro la vostra tesi della necessità delle categorie e sezioni dell'accademia poich  voi che non pretendete essere ascritto alle sezioni di fisiologia o patologia gi  avete espressa e sostenuta sopra questi rami di scienza un'opinione contraria a quella dell'Accademia e l'avete fatta accettare dal Governo. Ma qui si presenta una quistione pi  grave: poteva il Governo modificare lo statuto adottato dall'Accademia? Credo che non potesse: il Governo pu  non approvare le modificazioni recate dall'Accademia al proprio Statuto, e allora esse non hanno effetto e rimane in vigore lo Statuto antico, ma non pu  di suo arbitrio farvi aggiunte o cambiamenti. Non troverete esempi in altre accademie n  in altri Governi di ci  che   avvenuto ora all'Accademia de' Lincei. Il mio avviso   dunque che voi e il Governo abbiate ecceduto le vostre facolt  e che sarebbe da rimettersi in vigore lo Statuto del 1875.

Vi ho esposto lealmente e schiettamente i miei concetti che forse vi parranno stramberie come a me sembrano alcune deliberazioni che veggo adottate.

Ma non avendo io contribuito finora ai lavori dell'Accademia, non sento il coraggio di farmi promotore d'una opposizione formale.

Passo dunque senz'altro a sottoscrivermi

V.^{ro} Devoto Aff.^{mo}

Angelo Genocchi

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Accademia dei Lincei, Carteggio 1883, mazzo 11, fascicolo 49 sottofascicolo Genocchi.

¹ Guido Baccelli; cfr. n  16 n. 12.

XXIII

ANGELO GENOCCHI A QUINTINO SELLA

Torino 28 ottobre 1883

Carissimo Sella,

Non   ridicolo che in un'Accademia delle Scienze il numero dei Soci Stranieri equiparati ai Nazionali sia maggiore di quello dei Soci Nazionali? Ho tanta stima de' miei

Colleghi Lincei¹ da non dubitare che tutti e voi stesso risponderete che questa è *una cosa unica nel suo genere e veramente ridicola*.

All'accusa di presunzione rispondo *Medice cura te ipsum*². Nella questione della patologia e fisiologia in cui vi confessate incompetente non avete rispettata la decisione dell'Accademia, anzi l'avete combattuta dopo aver dichiarato che il presidente aveva obbligo di difendere tutte le decisioni dell'Accademia. Mi parlate dell'opinione del Baccelli³, ma è più rispettabile di quella dell'Accademia? E se il Ministro invece d'un Medico fosse un Avvocato o un Letterato o un Ingegnere?

Siete persuaso che la legge volendo il parere del Consiglio di Stato ha inteso garantire i diritti del Sovrano⁴ forse offesi da qualcuna delle nuove disposizioni o mettere al sicuro altre questioni di natura amministrativa; ma a nessuno poteva venire in mente di chiamare il Consiglio di Stato a dar parere sulla patologia e fisiologia.

Statemi sano e credetemi

V.^{ro} Aff.^{mo}

Angelo Genocchi

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Accademia dei Lincei, Carteggio 1883, mazzo 11, fascicolo 49 sottofascicolo Genocchi.

¹ Si tratta della Reale Accademia dei Lincei.

² E' il noto detto evangelico.

³ Guido Baccelli; cfr. n° 16 n. 12.

⁴ Si tratta di Umberto I.

XXIV

ANGELO GENOCCHI QUINTINO SELLA

Torino 17 novembre 1883

Caro Sella,

Il Signor Hermite¹ mi scrisse che il Colonnello Perrier² gli aveva domandato da parte vostra se avrebbe accettato d'essere eletto Socio Straniero della Reale Accademia de' Lincei, e ch'egli aveva risposto di non poter accettare per essere da 10 anni

¹ Charles Hermite; cfr. n° 16 n. 2.

² Francois Perrier; cfr. n° 19 n. 2.

Corrispondente della Pontificia³ di cui gli era stata narrata l'ostilità [*sic* ostilità] colla Reale. E mi domandava il mio parere sopra tale questione, risposi che quella ostilità vivace nei primi anni ora è calmata e che egli poteva accettare la nuova nomina senza far torto agli Accademici Pontifici i quali dovranno anzi rallegrarsi di veder confermato da altri Corpi Scientifici il giudizio da loro pronunciato. Questa mattina ho ricevuta un'altra lettera con cui l'Hermite accoglie tutto lieto il mio consiglio e se ne dichiara soddisfatto e riconoscente. E soggiunge: "Permettez donc de vous prier de faire savoir a M.^r Sella que grâces à vous je renonce avec bonheur à préférer être un ingrat plutôt qu' un *renégat* et que débarrassé de scrupules qui n'ont plus de raison d'être, j' accepte de mes amis Italiens, auxquels je dois tant, et avec la plus vive gratitude, le titre qui m'attache à eux par un nouveau lien. Soyez assez bon aussi pour dire à M.^r Sella, que j'ose me recommander a lui du souvenir de Charles S.^{te} Claire Deville⁴ avec qui j' ai été intimement lié, et pour qui j' ai su qu' un minéralogiste pouvait être en même temps un homme d'état, un ministre et occuper à la fois une place dans l'histoire de son pays et dans la science".

Adempiuto così il mio incarico, vi saluto di cuore e mi confermo

V.^{ro} Aff.^{mo}

Angelo Genocchi

Vi ho mandate le mie schede sigillate.

Fondazione Sella, Biella, archivio Sella, carte Quintino Sella, serie Accademia dei Lincei, Carteggio 1883, mazzo 11, fascicolo 49 sottofascicolo Genocchi.

³ Sulla questione delle due accademie lincee cfr. n° 19 n. 1.

⁴ Henri Sainte Claire Deville; cfr. n° 19 n. 5.

5 INDICE CRONOLOGICO DELL'EPISTOLARIO

Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino, 4 ottobre 1851
Quintino Sella ad Angelo Genocchi	[Torino?, febbraio 1860]
Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino, 21 febbraio 1860
Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino, 23 marzo 1860
Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino, 29 aprile 1861

Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino, 22 maggio 1861
Quintino Sella ad Angelo Genocchi	[Torino?], 7 giugno 1863
Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino, 12 giugno [1863]
Quintino Sella ad Angelo Genocchi	Torino, 30 ottobre 1863
Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino, 13 gennaio 1868
Quintino Sella ad Angelo Genocchi	Roma, 28 gennaio 1874
Quintino Sella ad Angelo Genocchi	Roma, 23 dicembre 1874
Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino, 29 dicembre 1874
Quintino Sella ad Angelo Genocchi	Roma, 10 gennaio 1875
Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino, 13 gennaio 1875
Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino, 16 gennaio 1875
Quintino Sella ad Angelo Genocchi	Roma, 18 gennaio 1875
Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino, 27 gennaio 1875
Quintino Sella ad Angelo Genocchi	Roma, 15 febbraio 1875
Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino, 18 febbraio 1875
Quintino Sella ad Angelo Genocchi	Roma, 20 febbraio 1875
Angelo Genocchi a Quintino Sella	[Torino, fine febbraio 1875]
Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino, 12 marzo 1875
Quintino Sella ad Angelo Genocchi	Roma, 18 aprile 1875
Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino, 20 aprile 1875
Quintino Sella ad Angelo Genocchi	Roma, 5 febbraio 1876
Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino, 24 aprile 1877
Quintino Sella ad Angelo Genocchi	Roma, 29 aprile 1877
Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino 5 maggio 1877
Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino, 15 maggio 1877
Quintino Sella ad Angelo Genocchi	Biella, 8 novembre 1880
Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino, 7 novembre 1881
Quintino Sella ad Angelo Genocchi	Biella, 26 novembre 1882
Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino, 27 novembre 1882
Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino, 16 giugno 1883
Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino, 10 ottobre 1883
Quintino Sella ad Angelo Genocchi	Biella, 11 ottobre 1883

Quintino Sella ad Angelo Genocchi	Novara, 23 ottobre 1883
Quintino Sella ad Angelo Genocchi	Biella, venerdì [1883]
Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino, 28 ottobre 1883
Quintino Sella ad Angelo Genocchi	Biella, 29 ottobre 1883
Angelo Genocchi a Quintino Sella	Torino, 17 novembre 1883
Quintino Sella ad Angelo Genocchi	Biella, 20 novembre 1883

Roma 28/1/74

Angelo Genocchi.

Un rigo solo per dire che
parlando della dignità senatoria
io alludevo al fatto che il
senato nell'applicare l'Art. 33
dello Statuto ove si dichiara
eleggibili i membri della regia
Accademia delle Scienze dopo 7 anni d'assenza
riteneva doverli esso riferire alle sole
Accademie i cui membri sono
appuntati con R. decreto.

Vi devo

Q. Sella

Lettera di Quintino Sella ad Angelo Genocchi del 28 gennaio 1874 (la lettera originale è stata ingrandita di un fattore 1.5).

Quintino Sella



Il prof. Ferrati ed io da giovedì a tempo
domani alle ore 11 $\frac{3}{4}$ in edgto Istituto Tecnico
dove ci vedremo entrambi per conferire con lei
Sperando che per la sua occupazione non gliel
ritarderemo. Alla sua volta farei questo piacere e
intanto il bene di confermarvi

A. S. Sella

Torino 4 ottobre 1851

Angelo Genocchi

Lettera di Angelo Genocchi a Quintino Sella del 4 ottobre 1851.

ISTRUZIONI PER LA REALIZZAZIONE DEI DATTILOSCRITTI

Il *Rendiconto* pubblica, di norma in lingua italiana, le comunicazioni fatte dai soci in una delle adunanze ordinarie dell'Accademia. I soci possono presentare anche lavori di altri autori. In questo caso l'accettazione della *Nota* per la pubblicazione è condizionata al parere favorevole di una commissione designata dall'Accademia.

Nella stesura della *Nota* si raccomanda l'uso di Microsoft® Word 2000 o in alternativa di LaTeX™. Le *note* dovranno essere presentate su supporto cartaceo, in triplice copia, e su supporto magnetico (floppy disk o Cd-Rom). La stesura dovrà essere conforme al modello che è riportato in *Appendice* al volume annuale: non sono ammesse modifiche al modello fornito.

I disegni di formule e grafici, contenuti in un rettangolo ideale del formato massimo di 125x190 mm, non possono essere accettati se prodotti a mano libera, essi dovranno essere realizzati ad alto contrasto e stampati con una stampante laser dalla buona risoluzione (600 dpi). Le fotografie, anche di grafici e disegni, devono essere stampate ad alto contrasto. Una copia a bassa risoluzione o una fotocopia di ciascuna fotografia, grafico o disegno, sarà collocata opportunamente nel dattiloscritto accompagnata dalla relativa didascalia, l'originale sarà sempre allegato a parte. Le fotografie a mezzi toni e quelle a colori, devono rispondere a criteri di riproducibilità ed essere utilizzate solo se necessarie per la completezza dell'esposizione. Le intestazioni delle figure e le relative didascalie non devono confondersi col testo. È consentita la presentazione delle fotografie e dei disegni in formato digitale solo nel caso in cui la scansione sia effettuata ad alta risoluzione.

Ogni pagina, inclusa la prima, dovrà essere numerata progressivamente. I riferimenti bibliografici possono essere indicati nel testo numericamente, in ordine di citazione, o per autore, mantenendo lo stesso criterio di presentazione nella Sezione Riferimenti Bibliografici (*References*). I riferimenti dovranno, in ogni caso, riportare nell'ordine: i nomi degli autori, l'anno di pubblicazione, il titolo completo, il titolo della rivista, il numero e la pagina di inizio e di fine lavoro. La struttura del dattiloscritto, i caratteri da utilizzare, le loro dimensioni e le spaziature sono indicate nell'esempio in *Appendice*.

I dattiloscritti non conformi alle norme previste non potranno essere accettati per la pubblicazione.

Saranno forniti gratuitamente 50 estratti, senza copertina, di ciascuna *Nota*, anche nel caso in cui il numero degli autori sarà superiore a uno. Ulteriori estratti e/o la richiesta di una copertina personalizzata saranno a carico degli autori che ne dovranno fare esplicita richiesta all'atto della presentazione del dattiloscritto per opportuna comunicazione preventiva all'Editore che comunicherà l'ammontare della spesa.

Abstract - Abstract written in Times New Roman 9, justified; abstract written in Times New Roman 9, justified; abstract written in Times New Roman 9, justified; abstract written in Times New Roman 9, justified;

Al termine lasciare vuoto 1.5 righe

Riassunto - Scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato.

Al termine del secondo riassunto si lasciano vuoti 2 righe e si digita a sinistra in **grassetto maiuscolo con caratteri TNR 9** il titolo del primo paragrafo che deve essere Introduzione.

1 - INTRODUCTION

Si lascia 0.5 righe e si inizia la digitazione con caratteri **TNR 11 giustificato** indentando i capoversi di 0.6 cm.

Primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione.

.....

Ultimo capoverso dell'introduzione. Ricordarsi che i capoversi vanno indentati di 0.6 cm.

Dopo questa sezione, e fra la fine di una sezione e l'intestazione dell'altra, si lasciano vuoti due righe. Si usa il **grassetto maiuscolo TNR 9** per tutte le intestazioni che saranno separate dal corpo della rispettiva sezione di 0.5 righe e per il corpo delle sezioni si useranno caratteri **TNR 11**, come per la sezione **INTRODUZIONE**. L'ultima sezione deve essere sempre **RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI (REFERENCES)**. Se esistono, mettere nell'ordine, le seguenti sezioni: 2 - **MATERIALI E METODI (MATERIALS AND METHODS)**, 3 - **RISULTATI (RESULTS)**, 4 - **DISCUSSIONE (DISCUSSION)**, o **CONCLUSIONI (CONCLUSIONS)**, 5 - **RIFERIMENTI**

APPENDICE

NORME PER LA STESURA DI UN DATTILOSCRITTO

Prima pagina.

Si lasciano vuoti quattro righi dall'alto.

Titolo: **Grassetto, Times New Roman (TNR) 13 con testo centrato.**

**La Secca delle Formiche di Vivara
(canale d'Ischia, Campania)
Osservazioni Geomorfologico-strutturali e Faunistiche**

A distanza di 1 rigo digitare gli autori della nota con **caratteri TNR 11:**

Nota di Vincenzo Rosso¹, Nicola Verde² e Pasquale Bianco^{1,*}

A distanza di 0.5 rigi digitare il nome del presentatore e la data dell'adunanza con **caratteri TNR 9:**

Presentata dal socio Michele Russo
(Adunanza del 6 febbraio, 1999)

A distanza di 1.5 rigi digitare in lingua inglese le Key words con **caratteri TNR 9** come indicato:

Key words: stratigraphy, island, DNA, proteinase, etc.

A distanza di 0.5 rigi digitare, come indicato, due riassunti con **caratteri TNR 9** di cui uno in italiano e l'altro in inglese:

Esempio di prima pagina

**Analisi sismologiche fatte
nella terra d'Otranto nel decennio 1970-1980**
Nota di Vincenzo Rosso¹, Nicola Verde² e Pasquale Bianco^{1*}

Presentata dal socio Michele Russo
(Adunanza del 6 febbraio, 1999)

Key words: : stratigraphy, Apulia, protein, hemoglobin etc.

Abstract - Abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified;

Riassunto - Scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano.

1 - INTRODUCTION

Primo capoverso dell'introduzione primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione.

(Al termine della prima pagina, a piè pagina si inserisce)

^{1,2...} Indirizzi e le varie affiliazioni; tanti quanti necessari per i vari autori

* Author to whom correspondence should be addressed

(qui termina la nota a piè pagina e la pagina 1)

BIBLIOGRAFICI (REFERENCES). I riferimenti, di cui si forniscono esempi per periodici e libri, **vanno scritti in TNR 9 con i titoli in corsivo:**

Hudson, T.H. and Grillo, F.G. (1993) *Reactivation of an inactive human X chromosome*. Science, **230**, 157-163.

Abrahams, R. and Marsden, J. (1978) *Foundation of mechanics*. Benjamin, New York, NY

Eventuali Ringraziamenti (Acknowledgements) per finanziamenti o altro vanno inseriti a piè di pagina al termine di RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI usando TMS 9.

Es:

Acknowledgements: i contributi economici, i ringraziamenti per notizie, altro.

Ricordare che come note a piè pagina della prima pagina, dopo una linea di divisione, vanno inseriti in **Times New Roman 9** i richiami e le eventuali annotazioni riguardanti il titolo e gli autori come nell'esempio:

[†] Dipartimento 1, indirizzo 1; Dipartimento 2, indirizzo 2 e così per i vari numeri che nel titolo distinguono gli autori.

* Author to whom correspondence should be addressed (Autore a cui indirizzare la corrispondenza)

NI 46410431
REND. DELL'ACCADE
MIA DELLE SCIENZ
E FISICHE MATER
AA. UU. SERIE
IV-VOL. LXVIII
-ANNO CXL
LIGUORI
EDITORE



N 00000100